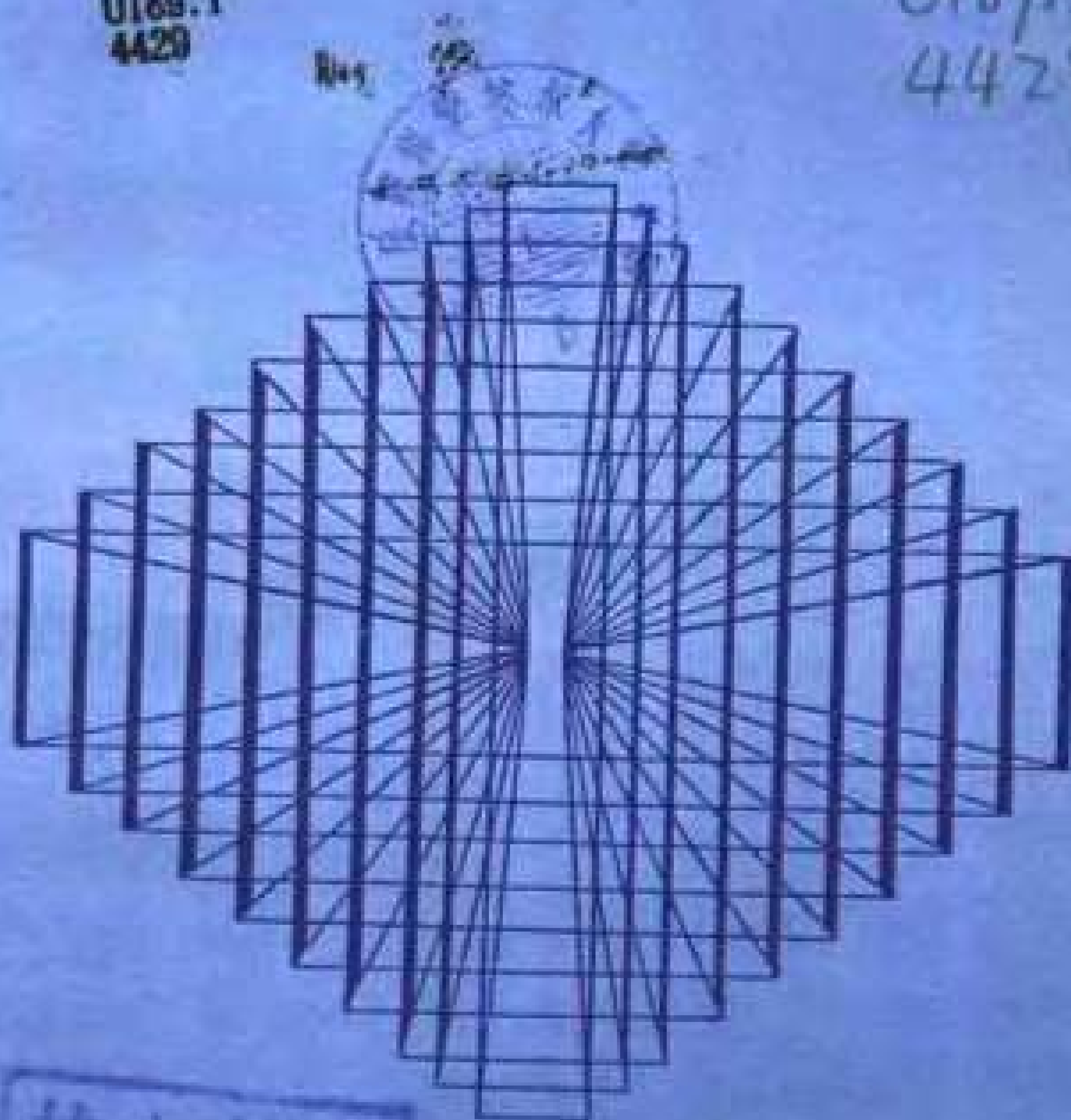


一般药物学专题选讲

四川教育出版社

现代数学研究丛书

一般拓扑学专题选讲



四川教育出版社

责任编辑:何伍鸣
封面设计:何一兵

现代数学研究丛书
一般拓扑学专题选讲　　　　　　　　蒋继光　著

四川教育出版社出版发行　　　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　　四川省地矿局测绘队印刷厂

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 8.125 插页 4 字数 170 千
1991 年 3 月第一版　　1991 年 3 月第一次印刷
印数:1—720 册

ISBN7-5408-1284-2/G・1245　（精)定价:4.70 元

序言

本书主要介绍仿紧空间的基本理论和某些近代成果，同时介绍基本的广义仿紧空间和正规空间的一些新结果。我们希望本书有助于对这些感兴趣的读者掌握有关的理论与技巧，并能尽快地进入研究的前沿. 其次，考虑到仿紧空间理论不仅是从事一般拓扑学的教学与科研人员所关心，同时也是从事微分几何、流形理论和分析学等方面的教学与科研人员所关心的，我们对这部分内容介绍得比较系统与详细。

无论从理论或应用的角度而言，仿紧空间都是一般拓扑学的一个基本而重要的组成部分。众所周知，度量空间与紧空间是两类应用很广的基本空间，仿紧空间则是它们二者公共的最成功的推广。它自身同样在几何、拓扑、流形和泛函等数学分支中有重要的应用。仿紧空间理论在其自身发展的同时，深刻地影响并有力地推动着一般拓扑学的发展。例如 1948 年 A. H. Stone 发现度量空间的仿紧性后，促成了度量化问题的满意解决. 仿紧空间可数乘性的研究从一个主要方面推动了广义度量空间理论的发展。为了研究仿紧空间的有限乘性，近年还应用了拓扑博奕的概念。从 1924 年 P. Alexandroff 引入局部有限族的概念到 1944 年 J. Dieudonnè 引入仿紧空间类，标志着拓扑学家从认识上和技巧上，从整体有限到局部有限的重大发展。打开了可以大显身手的广阔领域。尽管仿紧

空间已有半个世纪的研究历史，但现今仍处于向纵深发展的阶段。60—80年代在不附加分离公理的条件下，获得了仿紧空间的一系列新刻画，表明研究工作更加细致、深刻。

广义仿紧空间又称为覆盖性质理论。其中亚紧空间与次仿紧空间是仿紧空间的两类最自然的推广。近年来的研究发现，较这两类空间更广泛的次亚紧空间以及我国学者刘应明于1977年提出的拟仿紧空间类，不仅本身有一些良好的性质，还可以用它们来统一刻画仿紧空间和其它基本广义仿紧空间。

仅从Tietze扩张定理和Urysohn引理就足以表明正规空间类的基本意义。一个既困难又有趣的课题是乘积空间的正规性，这方面已有丰富的成果。在T. C. Przymusinski[1984]中已有较全面的介绍。本书则着重介绍该文认为是"特别有趣和强有力的定理"，由于超出该文范围而未予证明，这就是M. E. Rudin[1975]的主要结果。

全书分四章：第一章提供以序数和基数为主的集论基础，其内容是本书后几章需用的，同时也为了给研究生们一个近代表述的集论知识。了解序数与基数的一般读者可以不读本章而直接阅读第二章。第二章包含正则空间范围内仿紧空间的基本刻画，仿紧空间的基本性质，κ-仿紧空间和仿紧空间的一个重要子类，即强仿紧空间。第三章介绍正规与集体正规空间。它们既是进一步研究仿紧空间及其推广所必需的，而且自身也是一般拓扑学里应用很广的基本空间类。第四章包含仿紧空间的主要的四种推广，并在此基础上进一步介绍仿紧空间的刻画。本章最后一节汇集了若干主要的未解决的问题，供有兴趣的读者探讨。

二、三、四章末皆附有习题。基中少数是基本练习，多数可以看作书中内容的延伸。

凡了解一般拓扑学基础知识的读者，如读过江泽涵[1978]中的第一篇或蒲保明等[1985]的著作（书名见本书末的参考文献），就可以顺利地阅读本书。

本书是在同行友好的鼓励和敦促下动笔撰写的。四川教育出版社，特别是理科编辑室对本书的编辑出版给予了大力支持。胡师度教授细致的校对工作，令本书增色不少。研究生江辉有、周杰阅读并抄写了本书初稿。作者谨此一并表示衷心感谢。由于水平所限，书中难免有不妥之处，还望读者多加指正。

蒋 继 光

(Jiang Jiguang)

1989年8月于四川大学

目　录

第一章　集论预备 ………………………………………………… 1
§1.1　集论的公理系统与基本概念 ………………………… 1
§1.2　序数 ………………………………………………… 15
§1.3　基数 ………………………………………………… 26
第二章　仿紧空间 ………………………………………………… 36
§2.1　正规覆盖 …………………………………………… 37
§2.2　仿紧空间的基本刻画与性质 ………………………… 51
§2.3　κ－仿紧空间 ………………………………………… 70
§2.4　强仿紧空间 ………………………………………… 82
习　题 ………………………………………………… 87
第三章　正规与集体正规空间 ………………………………… 91
§3.1　正规空间 …………………………………………… 91
§3.2　集体正规空间 ……………………………………… 103
§3.3　可膨胀空间 ………………………………………… 123
§3.4　$\sum$-积的正规性 ………………………………… 139
习　题 ………………………………………………… 160
第四章　广义仿紧空间 ………………………………………… 164
§4.1　次仿紧与亚紧空间 ………………………………… 164
§4.2　次亚紧空间 ………………………………………… 176
§4.3　狭义拟仿紧空间 …………………………………… 197
§4.4　再论仿紧空间的刻画 ……………………………… 208

§4.5　某些公开问题 …… 222
习　题 …… 223
参考文献 …… 231
符号索引 …… 244
索引 …… 246

第一章 集论预备

本章提供本书需用的集论知识，并统一术语与符号.由于一般拓扑学中普遍地使用现代集论的基本概念与结果.我们在这里给出以序数和基数为主的集论基础的严格表述.为此，形式语言的使用是不可避免的，适当地使用也是有益的.不过为了大多数读者的方便，我们尽量少用逻辑符号.同时也为了本章在文体上与后几章大体一致.

§1.1 集论的公理系统与基本概念

通常所说的集论是指康托集论经过公理化方法和形式语言加工形成的一门严谨的基础数学理论，即以 Zermelo-Fraenkel 公理系统附加选择公理所构成的现代集论，简记为 ZFC. 集论的早期发展是与 19 世纪数学家们为了给微积分学奠定一个严格的理论基础的工作紧密联系的. 特别在捷克数学家 B. Bolzano(1781—1848)的著作中多次出现过任意集的概念. 然而集论的真正创立者是德国数学家 G. Cantor(1845—1918). 他在 1874—1897 年之间发表了一系列集论论文，建立了包括良序集、基数和序数在内的抽象集的一

般理论．康托集论是数学发展史上一项伟大的创造．在1900年前后，集论中出现了若干矛盾，即悖论．这些悖论给诞生不久的集论带来了困难，特别对那些致力于把整个数学建立在集论基础之上的数学家们，更是严重的打击．经过深入研究，人们发现，之所以产生悖论，首先是集的概念太一般．把无论多么大的总体都当作集必将导致矛盾．其次，含糊的语言所表达的不确切的概念，也易为悖论所利用．因此，必须用公理的方法来限定哪些总体才可以是集，也要保证有的总体一定是集．还要建立一套简明、实用的逻辑语言来确切地表达这些公理．1908年，德国数学家E. Zermelo（1871—1953）发表了第一个集论公理系统．从它可以推导出康托集论的几乎所有的主要结果，并能排除已知的悖论．1922年，A. Fraenkel补充了替换公理模式．这样就形成了Zermelo-Fraenkel公理系统．由此建立的集论简记为ZF．但在应用上还需要再添加一个选择公理，这样的集论记为ZFC．这就是现今在各个数学分支中普遍使用的集论．

下面我们来介绍ZFC的公理系统．为此，先介绍集论语言．集论语言首先包括下列基本符号：

$$=,\ \in,\ \wedge,\ \neg,\ \exists,\ (,\ ),\ x,\ y,\ z,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots$$

其中$=$叫**相等谓词**，$x=y$表示x与y是同一事物．$\in$叫**从属关系**，$x\in y$读作x**属于**y或称x是y的一个**元**．$\wedge$叫**合取联结词**，表示"且"．$\neg$叫**否定词**，表示"非"．$\exists$叫**存在量词**，表示"存在"，$\exists x$读作"存在x"．(，)分别叫左、右括号．x,y,x_0,x_1等叫**变元**．变元皆表示**集**且不再表其他事物．集是未予定义的原始概念．

由基本符号组成的有限序列叫**表达式**，如$)\wedge y\exists$就是一个表达式．用下面两条规则构成的表达式叫**公式**．

(1)　对每个变元x,y，

$$x \in y \text{ 与 } x = y$$

是公式，叫原子公式.

(2)　若 Φ 与 Ψ 是公式，则 $\Phi \wedge \Psi$, $\neg\Phi$，对每个变元 x, $\exists x\Phi$ 皆是公式.

$\Phi \wedge \Psi$ 表且 Φ 且 Ψ, $\neg\Phi$ 表示非 Φ, $\exists x\Phi$ 表示存在 x, Φ. 这时，我们说"$\exists x$"中的量词$\exists$ 作用于 Φ 的某个变元 y，如果 $y=x$. 集论语言由它的所有公式所组成.

为了缩短公式的表达式，通常还添加下列缩写符号和约定.

(1)　用$\forall x\Phi$ 代替$\neg(\exists\ x(\neg\Phi))$. 读作对每个 x, Φ. $\forall$ 叫全称量词.

(2)　用 $\Phi \vee \Psi$ 代替$\neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\Psi))$. 读作 Φ 或 Ψ. $\vee$ 叫析取联结词.

(3)　用 $\Phi \rightarrow \Psi$ 代替$(\neg\Phi) \vee \Psi$，读作若 Φ 则 Ψ，或 Φ 导致 Ψ.

(4)　用 $\Phi \leftrightarrow \Psi$ 代替$(\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi)$，读作 Φ 当且仅当 Ψ.

(5)　用 $x \notin y$ 代替$\neg(x \in y)$，读作 x 不属于 y. 用 $x \neq y$ 代替$\neg(x=y)$，读作 x 不等于 y.

(6)　用$(\exists x \in y)\Phi$ 代替$\exists x((x \in y) \wedge \Phi)$. 用$(\forall x \in y)\Phi$ 代$\forall x((x \in y) \rightarrow \Phi)$.

(7)　在不致混淆时，省略括号. 如 $(x \in y) \wedge \Phi$ 可简写为 $x \in y \wedge \Phi$. $\exists x(\forall y(y \in x))$可简写为$\exists x \forall y \in x$.

公式 Φ 的一部分连贯的符号，如果它自己也构成一个公式，则称为 Φ 的一个子公式. 例如公式

$$\forall x(x \notin y) \wedge \exists\ y(z \in y)$$

有 6 个子公式. 它们是 $x \in y$, $\neg(x \in y)$, $\forall x(x \notin y)$, $z \in y$, $\exists y(z \in y)$及原公式自己. 公式中的量词$\exists x$(或$\forall x$)的辖区是以$\exists x$($\forall x$)为首的子公式. 公式中的一个变元称为约束出现的或约束变元，如果它属于公式

中某个量词的辖区内且这个量词作用于它. 不是约束出现的变元称为**自由出现的**或**自由变元**. 例如在公式

$$\forall x(x \notin y) \land \exists y(z \in y)$$

中,量词$\forall x$ 的辖区是$\forall x(x \notin y)$. 公式 $x \notin y$ 中的变元 x 属于这个辖区且$\forall$ 作用于它,故 x 是约束变元. y 虽在$\forall x$ 的辖区内,但$\forall$ 没有作用于它,y 在原公式中是自由出现的. 但在子公式$\exists y(z \in y)$中的 y 显然是约束出现的,而 z 是自由变元. 改变公式中约束变元的符号并不改变公式的含意. 如$\exists y(z \in y)$也可写成$\exists u(z \in u)$. 一个公式表示它的自由变元的一种性质,没有自由变元的公式叫**语句**,它表达一个非真即假的事物.

当我们用 $\Phi(x_0, x_1, \cdots, x_n)$表示公式时,是指公式 Φ 中自由出现的变元皆在两两不同的变元 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 之中. 最后我们再介绍一个缩写符号.

(8) 用$\exists ! x\Phi$ 代替公式

$$\exists y \forall x(x = y \leftrightarrow \Phi),$$

此处 y 是一个不在 Φ 中自由出现的变元. $\exists ! x\Phi$ 读作**存在唯一的** x, Φ.

集论 ZFC 的第一条公理是

1.1.1 存在性公理

$$\exists x(x = x).$$

这条公理表示,存在一个集.

1.1.2 外延性公理

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

这条公理表示,由相同的元构成的二集相等.

记号 $x \subset y$ 表示$\forall z(z \in x \to z \in y)$,称 x **包含于** y 或 x 是 y 的**子集**. $x \subset y$ 且 $x \neq y$ 时,称 x 是 y 的**真子集**. 由外延性公理可知,若 $x \subset y$ 且 y

$\subset x$，则 $x=y$.

1.1.3　概括公理模式

$$\forall a_1\cdots\forall a_n\forall x\exists y\forall z(z\in y\leftrightarrow z\in x\wedge\Phi(z,a_1,\cdots,a_n)).$$

其中 Φ 是一个公式且 x,y 是与 $z,a_1,\cdots,a_n$ 皆不同的两个不同变元.

据外延性公理，上面公理中断言存在的集 y 是唯一的，今后记为

$$\{z\in x:\Phi(z,a_1,\cdots,a_n)\}.$$

对于不同的公式 Φ，上面的公式给出不同的公理，所以称之为公理模式.

由公理 1.1.1 及 1.1.3 知，$\{z\in x:z\neq z\}$ 是一个集. 显然每个集都不是它的元，且由 1.1.2 知，这种不含任何元的集是唯一的，称之为**空集**，记为 $\varnothing$.

1.1.4　定理　以一切集为元的集不存在.

证　若存在一个集 y 以一切集为其元. 由公理 1.1.3 知，$x=\{z\in y:z\notin z\}$ 是一个集，从而 $x\in y$. 于是 $x\in x\leftrightarrow x\notin x$，矛盾. 证毕.

1.1.5　成对公理

$$\forall x\forall y\exists z\forall u(u\in z\leftrightarrow u=x\vee u=y).$$

这条公理表示，对任意的集 x 与 y 存在唯一的（通过外延性公理）集 z，使得它的元恰为 x 和 y. 我们记 $z=\{x,y\}$，叫一个**无序对**. 形如 $\{x,x\}$ 的集简记为 $\{x\}$，叫**单元集**，集

$$\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

叫**序对**.

1.1.6　并公理

$$\forall x\exists y\forall z(z\in y\leftrightarrow\exists u\in x(z\in u)).$$

这条公理表示，对每个集 x，存在唯一的集 y 使得 y 的元恰好是 x

的元的元. 这个集 y 叫 x **的并**. 记为 $\bigcup x$. 对每个集 x,令

$$\bigcap x = \{z : \forall u \in x(z \in u)\},$$

称为 x 的**交**. 上式右端表示一个类(见下一段). 当 $x \neq \varnothing$ 时,任取 $w \in x$,则

$$\bigcap x = \{z \in w : \forall u \in x(z \in u)\}.$$

据概括公理模式,$\bigcap x$ 是一个集. 当 $x = \varnothing$ 时,$\bigcap x$ 没有定义. 事实上 $\bigcap \varnothing$ 是由一切集构成的总体,据 1.1.4,它不是一个集,我们称它为集的**宇宙**或**万有类**,记为 V.

我们记 $y \bigcup z = \bigcup \{y, z\}$, $y \bigcap z = \bigcap \{y, z\}$. 定义

$$y \setminus z = \{x \in y : x \notin z\},$$

叫 y 与 z 的**差**.

上面我们提到了集的万有类 V,即由一切的集构成的总体. 还有许多与 V 相似的大得来不能是集的总体,我们称之为**真类**. 确切地说,给定一个集论语言的公式 Φ 及变元 $a_1, \cdots, a_n$. 则记号

$$A = \{x : \Phi(x, a_1, \cdots, a_n)\}$$

表示一个类,即 $x \in A \leftrightarrow \Phi(x, a_1, \cdots, a_n)$. 其中 $a_1, \cdots, a_n$ 叫**参变量**. 显见类只是公式的另一种表现形式,并不是我们集论的新的研究对象. 我们研究的对象只有一种,就是集. 类只是一个辅助性概念. 使用类往往比直接使用公式方便,例如类可以像集那样进行并和交的运算. 每个集 y 是一个类,因为 $y = \{x : x \in y\}$. 不是集的类叫**真类**. 除了我们已知的万有类 V 是真类外,我们还将介绍其他的真类. 今后我们用黑体英文字母 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$ 等来表示类.

1.1.7 幂集公理

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall u(u \in z \rightarrow u \in x)).$$

这条公理表示,对每个集 x,存在唯一的 y 使得 y 的元恰为 x 的子集. 这个集 y 记为 $P(x)$,叫 x 的**幂集**.

1.1.8　替换公理模式

$$\forall a_1\cdots\forall a_n(\forall x\exists\,!y\Phi(y,x,a_1,\cdots,a_n)\rightarrow$$
$$\forall u\exists\, v\forall y(y\in v\leftrightarrow\exists x\in u\wedge\Phi(y,x,a_1,\cdots,a_n))).$$

其中 Φ 是一个公式且 u,v 是与 $x,y,a_1,\cdots,a_n$ 皆不同的两个不同变元.

这条公理模式表示:若$\forall x\exists!y\Phi(y,x,a_1,\cdots,a_n)$,则对每个 u,

$$v=\{y:\exists\, x\in u\Phi(y,x,a_1,\cdots,a_n)\}$$

是一个集.

1.1.9　基础公理

$$\forall x(x\neq\varnothing\rightarrow\exists\, y\in x(y\cap x=\varnothing)).$$

由此公理可以推出 $x\in y$ 与 $y\in x$ 不能同时成立. 特别地 $x\notin x$.

为了今后讨论方便,我们现在作一项技术性的约定:集论语言的变元,除了用 $x,y,z,x_0,x_1,\cdots$ 等字母表示外,今后我们可以用大小写英文或希腊文字母来表示. 例如 $A,B,X,U,a,b,c,\Gamma,\Delta,\alpha,\beta,\xi$,等都可作为变元的符号,也就是都可以表示集. 而类,仍用黑体大写字母 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{X}$ 等表示.

任给 A,B,它们的**笛卡儿积**定义为

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle : x\in A\wedge y\in B\}.$$

为了验明它是集,首先对每个固定的 $y\in B$,有$\forall x\in A\exists!\ z(z=\langle x,y\rangle)$. 由替换公理模式知

$$P(y,A)=\{z:\exists\, x\in A(z=\langle x,y\rangle)\}$$

是一个集. 其次有$\forall y\in B\exists!u(u=P(y,A))$. 再用替换公理可知,

$$\{u:\exists\, y\in B(u=P(y,A))\}=\{P(y,A):y\in B\}$$

是一个集. 最后,由并公理知

$$A\times B=\bigcup\{P(y,A):y\in B\}$$

是一个集.

以序对为元的集叫**关系**. 设 R 是一个关系,则 $\langle x,y\rangle\in R$ 简记为 xRy. 集

$$\mathrm{dom}(R)=\{x:\exists\ y(xRy)\}$$

叫关系 R 的**定义域**. 它是集,因为若 $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}\in R$,则 $x\in\bigcup\bigcup R$,从而

$$\mathrm{dom}(R)=\{x\in\bigcup\bigcup R:\exists\ y(xRy)\}.$$

由概括公理模式知,上式右端是一个集. 同理,

$$\mathrm{ran}(R)=\{y:\exists\ x(xRy)\}$$

是一个集,叫关系 R 的**值域**. 关系

$$\mathrm{id}_A=\{\langle x,x\rangle:x\in A\}$$

叫集 A 上的**恒同**. 设 R 是关系,则集

$$R[A]=\{y:\exists\ x\in A(xRy)\}$$

称为 A 在 R 下的**像**. $R[\{x\}]$简写为 $R[x]$. 集

$$R^{-1}=\{\langle x,y\rangle:yRx\}$$

叫关系 R 的**逆**. 设 S 是另一关系使得 $\mathrm{ran}(S)=\mathrm{dom}(R)$,则集

$$R\circ S=\{\langle x,y\rangle:\exists u(xSu\wedge uRy)\}$$

称为 R 与 S 的**复合**. R 称为 A **上的**关系,如果 $R\subset A\times A$.

一个关系 f 称为**函数**,如果

$$\forall x\in\mathrm{dom}(f)\exists!y(xfy).$$

这个唯一的 y 记为 $f(x)$,称为 f 在 x 的**值**. 称函数 f 是 **1-1 的**,如果 $\forall x\forall x'\forall y(xfy\wedge x'fy\rightarrow x=x')$. 记号 $f:A\rightarrow B$ 表示 f 是一个函数使得 $\mathrm{dom}(f)=A$ 且 $\mathrm{ran}(f)\subset B$. 当 $\mathrm{ran}(f)=B$ 时,称 f 为**满函数**或**到 B 上的函数**. 当 $f:A\rightarrow B$ 是 1-1 满函数时,逆关系 $f^{-1}:B\rightarrow A$ 也是 1-1 满函数使得

$$f^{-1}(y)=x\leftrightarrow f(x)=y.$$

这个函数 f^{-1}称为 f 的**反函数**.

设 $f: A \to B$. 首先,当把 f 看作是到 $\mathrm{ran}(f)$上的满函数时,就改记为 $\hat{f}$,即 $\hat{f}: A \to \mathrm{ran}(f)$,使得$\forall x \in A(\hat{f}(x)=f(x))$. 其次,设 $C \subset A \subset X$. 则 $f|C=f\cap(C\times B)$是 C 到 B 的函数,称为 f 在 C 上的**限制**,若函数 $g: X \to B$ 使得 $g|A=f$,则称 g 是 f 到 X 上的一个**扩张**.

记号${}^AB$ 表示从 A 到 B 内的一切函数构成的集,即${}^AB=\{f: f: A\to B\}$. $\forall f: A \to B, f\subset A\times B$. 则${}^AB=\{f\in P(A\times B): f: A\to B\}$,由概括公理模式知它是一个集. 显然${}^{\varnothing}A=\{\varnothing\}$. 特别地${}^{\varnothing}\varnothing=\{\varnothing\}$. 若 $A\neq\varnothing$,则${}^A\varnothing=\varnothing$.

若 F 是集 S 上的函数,即 $\mathrm{dom}(F)=S$. 我们有时将 F 另记为$\{F_s: s\in S\}$,称为一个**族**或**集族**,其中 $F_s=F(s), s\in S$. S 则称为这个族的**指标集**. 设对每个 $s\in S, f_s: A_s\to B$ 是函数. 称函数族$\{f_s: s\in S\}$是**相合的**,如果对任意的 $s,t\in S$,

$$f_s|(A_s\cap A_t)=f_t|(A_s\cap A_t),$$

即 f_s 与 f_t 在交集 $A_s\cap A_t$ 的每个元处有相同的值. 这时,易知$\bigcup_{s\in S}f_s: \bigcup_{s\in S}A_s\to B$ 是函数,称为函数族$\{f_s: s\in S\}$的**组合**,记为$\bigtriangledown_{s\in S}f_s$.

任意族$\{A_s: s\in S\}$的**笛卡儿积**定义如下:

$$\prod_{s\in S}A_s=\{x: x: S\to\bigcup_{s\in S}A_s\wedge\forall s\in S(x_s=x(s)\in A_s)\}.$$

笛卡儿积也简称**积**,每个 A_s 叫积的第 s 个因子,$\prod_{s\in S}A_s$ 的元 x,也记为$\langle x_s\rangle_{s\in S}$. 若$\forall s\in S, A_s=A$,则 $\prod_{s\in S}A_s={}^SA=\{x: x: S\to A\}$.

对任意的积 $\prod_{s\in S}A_s$ 及 $T\subset S$,则投射

$$P_T: \prod_{s\in S}A_s\to\prod_{s\in T}A_s$$

定义如下:

$$\forall x=\langle x_s\rangle_{s\in S}\in\prod_{s\in S}A_s, P_T(x)=x|T=\langle x_s\rangle_{s\in T}.$$

当每个 $A_s\neq\varnothing$时,P_T 是满函数. 当 $T=\{s\}$是单元集时,$P_{\{s\}}$简记为 P_s,即

$$P_s: \prod_{s\in S} A_s \to A_s \text{ 使得 } P_s(x)=x_s.$$

1.1.10 选择公理

选择公理表示:对每个 S,若$\forall s\in S(A_s\neq\varnothing)$,则 $\prod_{s\in S} A_s\neq\varnothing$. 选择公理记为 AC,通常把它写成下列的等价形式.

$$\forall x(\varnothing\notin x\wedge\forall u\in x\forall v\in x(u\neq v\to u\cap v=\varnothing)$$
$$\to\exists\ y\forall w(w\in x\to\exists! z\in w\cap y)).$$

我们将在下一节介绍最后一条公理,即无限性公理. 所谓 Zermelo-Fraenkel 公理系统是指下列九条公理或公理模式:存在性公理,外延性公理,概括公理模式,成对公理,并公理,幂集公理,替换公理模式,基础公理和无限性公理. 由这九条公理构成的数学理论就是**集论**,记为 ZF. 由于应用上的需要,通常再添加一条公理 AC. 这样的理论记为 ZFC,称为附加选择公理的集论. 历史上,一些数学家曾怀疑选择公理的合理性,并试图在 ZF 内来证明它而未获成功. 1939 年,奥地利数学家 K. Gödel 证明了 AC 相对于 ZF 是相容的,即在 ZF 内不能证明 AC 的否定. 1963 年,美国数学家 P. Cohen 证明了 AC 对于 ZF 是独立的,即在 ZF 内不能证明 AC. 从此,人们可以像放心使用集论那样放心使用 AC,同时也不再徒劳地在 ZF 内去证明 AC 或否定 AC.

在我们转入介绍偏序集之前,对类再作一些说明,设 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 是两个类,我们用记号 $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$ 表示:$\forall x(x\in\mathbf{A}\to x\in\mathbf{B})$. 这时称 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{B}$ 的一个**子类**. 与集一样,我们可以定义下列类的运算:

$$\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\{x: x\in\mathbf{A}\vee x\in\mathbf{B}\};$$
$$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{x: x\in\mathbf{A}\wedge x\in\mathbf{B}\};$$
$$\mathbf{A}\setminus\mathbf{B}=\{x: x\in\mathbf{A}\wedge x\notin\mathbf{B}\};$$
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\{\langle x,y\rangle: x\in\mathbf{A}\wedge y\in\mathbf{B}\}.$$

它们分别称为类 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的并、交、差和笛卡儿积. 以序对为元的类

也称为关系. 若 $R\subset A\times A$,则称 R 是类 A 上的一个关系. 与通常关系一样可以定义 $\mathrm{dom}(R)$与 $\mathrm{ran}(R)$. 称类 F 是一个函数如果它是一个关系且合于:

$$\forall x\in \mathrm{dom}(F)\exists !\, y(\langle x,y\rangle\in F).$$

这时记 $y=F(x)$. 记号 $F:A\to B$ 表示 F 是一个函数使得 $\mathrm{dom}(F)=A$ 且 $\mathrm{ran}(F)\subset B$. 若尚有 $C\subset A$,则函数 $F|C=F\cap(C\times B)$称为 F 在 C 上的限制.

1.1.11　定义　设 R 是 A 上的关系.

(Ⅰ)　R 在 A 上是**非自反的**,如果$\forall x\in A(\neg(xRx))$.

(Ⅱ)　R 在 A 上是**传递的**,如果

$$\forall x,y,z\in A(xRy\wedge yRz\to xRz).$$

(Ⅲ)　R 是 A 上的一个**偏序**或$\langle A,R\rangle$是**偏序集**,如果 R 是 A 上的一个非自反的传递关系.

设$\langle A,R\rangle$与$\langle B,S\rangle$是二偏序集. 函数 $f:A\to B$ 称为 $R-S$ **增函数**,简称增函数,如果

$$\forall x,y\in A(xRy\to f(x)Sf(y)\vee f(x)=f(y)).$$

称为**严格增函数**,如果

$$\forall x,y\in A(xRy\to f(x)Sf(y)).$$

类似地可以定义减函数和严格减函数的概念. 称$\langle A,R\rangle$与$\langle B,S\rangle$是**同构的**,如果$\exists f:A\to B$ 是 1—1 满的且 f 与 f^{-1}皆是严格增的,这时记

$$f:\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle,$$

f 称为**同构**.

设$\langle A,R\rangle$是偏序集且 $C\subset A$. 称 C 是$\langle A,R\rangle$内的一个**链**,如果

$$\forall x,y\in C(x=y\vee xRy\vee yRx)$$

设 $B\subset A$,$a\in A$. 称 a 是 B 的 R-**最小元**,记为 $a=\min B$,如果 $a\in B$ 且

$\forall x\in B(aRx\vee a=x)$. 类似地可以定义 B 的 **R-最大元** $\max B$. a 是 B 的一个 **R-极小元**，如果 $a\in B$ 且 $\forall x\in B(\neg(xRa))$. 类似地可定义 B 的 **R-极大元**. a 称为 B 的一个 **R-下界**，如果 $a\in A$ 且 $\forall x\in B(aRx\vee a=x)$. 类似地可定义 B 的 **R-上界**. a 是 B 的 **R-下确界**，记为 $a=\inf B$，如果 a 是 B 的一个 R-下界且是 B 的一切 R-下界的 R-最大元. 类似地可定义 B 的 **R-上确界** $\sup B$.

1.1.12　定义　(Ⅰ)偏序集 $\langle A,R\rangle$ 称为**全序集**或 R 是 A 上的**全序**，如果 R 在 A 上具有下列三歧性：

$$\forall x,y\in A(x=y\vee xRy\vee yRx).$$

(Ⅱ)偏序集 $\langle A,R\rangle$ 称为**良序集**或 R 是 A 上的**良序**，如果 A 的每个不空子集有 R-最小元.

设 $\langle A,R\rangle$ 是全序集且 $x\in A$. 记

$$\text{pred}(A,x,R)=\{y\in A: yRx\}.$$

则全序集 $\langle \text{pred}(A,x,R),R\rangle$ 称为 $\langle A,R\rangle$ 的由 x 确定的**初段**.

1.1.13　定理(超限归纳原理)　设 $\langle A,R\rangle$ 是良序集. 若 $B\subset A$ 使得 $\forall x\in A(\text{pred}(A,x,R)\subset B\to x\in B)$，则 $B=A$.

证　若 $A\setminus B\neq\varnothing$，它有 R-最小元 x. 则 $\text{pred}(A,x,R)\subset B$. 由假设 $x\in B$，矛盾，证毕.

选择公理有多种等价形式，最常用的是下面的良序原理和 Zorn 引理. 它们相互等价的证明读者可在大多数集论入门书(如 H・B・Enderton, Elements of set theory, 1977)中找到，本书从略.

1.1.14　良序原理　每个集上存在一个良序.

1.1.15　Zorn 引理　若偏序集 $\langle A,R\rangle$ 内每个链有上界，则 A 有一个 R-极大元.

1.1.16　引理　(Ⅰ)　设 $\langle A,R\rangle$ 是良序集且 $f: A\to A$ 是严格增的，则

$$\forall x \in A(xRf(x) \lor x = f(x)).$$

(Ⅱ)　良序集不与它自己的任何初段同构.

(Ⅲ)　二同构的良序集之间的同构(函数)是唯一的.

(Ⅳ)　设$\langle A,R\rangle$与$\langle B,S\rangle$是良序集且$f:\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$,则

$$\forall t\in A(g:\langle \mathrm{pred}(A,t,R),R\rangle\cong\langle \mathrm{pred}(B,f(t),S),S\rangle),$$

其中$g=f|\mathrm{pred}(A,t,R)$.

证　(Ⅰ)令$B=\{x\in A: f(x)Rx\}$,只需证$B=\varnothing$. 事实上,若$B\neq\varnothing$,设b是B的R-最小元,则$f(b)Rb$,从而$f(f(b))Rf(b)$. 于是$f(b)\in B$,矛盾.

(Ⅱ)若存在良序集$\langle A,R\rangle$及$x\in A$,使得

$$\exists f:\langle A,R\rangle\cong\langle \mathrm{pred}(A,x,R),R\rangle$$

则$f(x)Rx$,与(Ⅰ)矛盾.

(Ⅲ)若有良序集$\langle A,R\rangle$与$\langle B,S\rangle$,使得

$$\exists f,g:\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$$

令$h=g^{-1}\circ f$,则$h^{-1}=f^{-1}\circ g$. 于是

$$h,h^{-1}:\langle A,R\rangle\cong\langle A,R\rangle$$

由(Ⅰ)知$\forall x\in A, h(x)=x$. 即$h=id_A$,从而$f=g$.

(Ⅳ)由同构的定义直接知. 证毕.

1.1.17　定理　对任意的良序集$\langle A,R\rangle$与$\langle B,S\rangle$,下列三条恰有一条(即至少有一条且至多有一条)成立.

(a)　$\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$.

(b)　$\langle A,R\rangle$与$\langle B,S\rangle$的一个初段同构.

(c)　$\langle B,S\rangle$与$\langle A,R\rangle$的一个初段同构.

证　先证三条中至多有一条成立. 由1.1.16(Ⅱ)知,(a)与(b),(a)与(c)皆不能同时成立. 现证(b)与(c)不能同时成立. 事实上,若$\exists x\in A,\exists y\in B$使得

$$\exists f: \langle A,R\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(B,y,S),S\rangle,$$

且

$$\exists g: \langle B,S\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(A,x,R),R\rangle.$$

易知 $f[\mathrm{pred}(A,x,R)]=\mathrm{pred}(B,f(x),S)$. 令 $h=f|\mathrm{pred}(A,x,R)$，则

$$h\circ g: \langle B,S\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(B,f(x),S),S\rangle,$$

与 1.1.16(Ⅰ)矛盾. 因此，三条中至多有一条成立.

再证三条中至少有一条成立. 令

$f=\{\langle x,y\rangle\in A\times B: \langle \mathrm{pred}(A,x,R),R\rangle\cong\langle \mathrm{pred}(B,y,S),S\rangle\}$，$D=\mathrm{dom}(f)$，$E=\mathrm{ran}(f)$. 由 1.1.16(Ⅰ)知，$f: D\to E$ 是 1-1 函数. 现证

$$f: \langle D,R\rangle\cong\langle E,S\rangle. \tag{1}$$

只需证 f 是严格增的. 设 $x,t\in D$，使得 xRt. 又设

$$h: \langle \mathrm{pred}(A,t,R),R\rangle\cong\langle \mathrm{pred}(B,f(t),S),S\rangle.$$

则 $h[\mathrm{pred}(A,x,R)]=\mathrm{pred}(B,h(x),S)$. 于是，有 $h|\mathrm{pred}(A,x,R):$ $\langle \mathrm{pred}(A,x,R),R\rangle\cong\langle \mathrm{pred}(B,h(x),S),S\rangle$，

从而 $\langle x,h(x)\rangle\in f$. 又 $x\in\mathrm{pred}(A,t,R)$，则 $f(x)=h(x)\in\mathrm{pred}(B,f(t),S)$，$f(x)Sf(t)$. (1)真.

若 $D\neq A$，令 $d=\min(A\setminus D)$，则 $D=\mathrm{pred}(A,d,R)$. (2)

若 $E\neq B$，令 $r=\min(B\setminus E)$，则 $E=\mathrm{pred}(B,r,S)$. (2′)

若 $D\neq A$ 且 $E\neq B$，则由(2)、(2′)及(1)知

$$f: \langle \mathrm{pred}(A,d,R),R\rangle\cong\langle \mathrm{pred}(B,r,S),S\rangle.$$

则 $\langle d,r\rangle\in f$，$d\in D=\mathrm{pred}(B,d,R)$. dRd，矛盾. 故只有下面三种情形：或 $D=A$ 且 $E=B$，这时由(1)知，情形(a)成立. 或 $D=A$ 且 $E\neq B$，由(1)及(2′)知，情形(b)成立. 或 $D\neq A$ 且 $E=B$，这时(c)成立. 定理证毕.

§1.2　序　　数

本节介绍序数的概念、运算和基本性质. 最后介绍很有用的超限归纳法和超限递归定理. 我们可以用下述观点来看待自然数，即 $0=\varnothing, 1=\{0\}, 2=\{0,1\}, 3=\{0,1,2,\}$，一般地，$n=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$. 于是每个自然数都具有下面两条性质：

（Ⅰ）　若 $m\in n$，则 $m\subset n$；

（Ⅱ）　$m\in n\leftrightarrow m<n$，从而 $\langle n,\in\rangle$ 是良序集.

序数作为自然数的推广，它以上面两条性质为特征.

1.2.1　定义　（Ⅰ）　A **是传递的**，如果

$$\forall x\in A(x\subset A).$$

（Ⅱ）　A 是一个**序数**，如果 A 是传递集并且 $\in_A$ 是 A 上的良序，此处 $\in_A=\{\langle x,y\rangle\in A\times A: x\in y\}$.

今后，序数用希腊字母的前几个如 α,β,γ，或后几个如 ξ,τ,ω 等来表示. $\forall\alpha\cdots$ 表示 $\forall x$（x 是序数 $\rightarrow\cdots$）.

1.2.2　引理　（Ⅰ）　若 α 是序数，则 $\forall x\in\alpha$，x 是序数且 $x=\mathrm{pred}(\alpha,x,\in_\alpha)$.

（Ⅱ）　若 $\langle\alpha,\in\rangle\cong\langle\beta,\in\rangle$，则 $\alpha=\beta$.

（Ⅲ）　$\forall\alpha,\beta$，下列三条恰有一条成立：

$$\alpha=\beta,\qquad \alpha\in\beta,\qquad \beta\in\alpha.$$

证　（Ⅰ）　设 $x\in\alpha$，因 α 是传递集且 $\in_\alpha$ 是 α 上的良序，$x\subset\alpha$，从而 $\langle x,\in_x\rangle$ 是良序集. 只需再证 x 是传递的. 设 $y\in x$. 因 $y\in\alpha$，$y\subset\alpha$. $\forall t\in y$，$t\in\alpha$. 因 $\langle\alpha,\in_\alpha\rangle$ 是良序集且 $t,y,x\in\alpha$ 使得 $t\in y$，$y\in x$，故 $t\in x$. 结果有 $y\subset x$，x 是传递的. 其次，因 $x\subset\alpha$，有 $x=\alpha\cap x=\{y\in$

$\alpha : y \in x\} = \mathrm{pred}(\alpha, x, \in_\alpha)$.

(Ⅱ)　设 $f : \langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \beta, \in \rangle$，只需证 $f = id_\alpha$. 为此，令 $E = \{\xi \in \alpha : f(\xi) \neq \xi\}$. 若 $E \neq \varnothing$，它有 $\in$-最小元 ξ. 于是 $\mathrm{pred}(\alpha, \xi, \in_\alpha) = \mathrm{pred}(\beta, f(\xi), \in_\beta)$. 由(Ⅰ)知，$\xi = f(\xi)$. $\xi \notin E$，矛盾. 故 $E = \varnothing$. 从而 $f = id_\alpha$，$\alpha = \beta$.

(Ⅲ)　易知

$$\alpha \in \beta \leftrightarrow \exists\ \delta \in \beta(\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \mathrm{pred}(\beta, \delta, \in_\beta) \rangle).$$

由(Ⅱ)及 1.1.17 得证.

1.2.3　引理　设 C 是以序数为元的任意集，则

(Ⅰ)　$\langle C, \in_C \rangle$ 是良序集，其中 $\in_C = \{\langle x, y \rangle \in C \times C : x \in y\}$.

(Ⅱ)　若 C 是传递的，则 C 是序数.

(Ⅲ)　$\bigcup C$ 是序数.

(Ⅳ)　若 $C \neq \varnothing$，则 $\bigcap C$ 是序数.

证　(Ⅰ)　由 1.2.2 知，$\in_C$ 是 C 上非自反的关系且具有三歧性. 设 α、β、$\gamma \in C$ 使得 $\alpha \in \beta$，$\beta \in \gamma$，则 $\beta \subset \gamma$，从而 $\alpha \in \gamma$. 于是 $\langle C, \in_C \rangle$ 是全序集. 现设 $\varnothing \neq A \subset C$. 任取 $\alpha \in A$，若 $\alpha \cap A = \varnothing$，由 α 是 A 的最小元. 若 $\alpha \cap A \neq \varnothing$，它在良序集 $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ 的最小元就是 A 在 $\langle C, \in_C \rangle$ 的最小元. 故 $\langle C, \in_C \rangle$ 是良序集.

(Ⅱ)　由(Ⅰ)知.

(Ⅲ)　由(Ⅱ)知.

(Ⅳ)　若 $C \neq \varnothing$，据(Ⅰ)，它有最小元 α，则 $\bigcap C = \alpha$. 引理证毕.

由上面引理知，$\in$ 是序数组成的任一集上的良序. 今后我们用 $\alpha < \beta$(或 $\beta > \alpha$)来代替 $\alpha \in \beta$，并说 α **小于** β 或 β **大于** α. 用 $\alpha \leqslant \beta$ 表示 $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$.

1.2.4　引理　(Ⅰ)　$\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.

(Ⅱ)　$\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \subset \beta \wedge \alpha \neq \beta$；$\alpha \leqslant \beta \leftrightarrow \alpha \subset \beta$.

证 (Ⅰ)由 1.2.2(Ⅰ)知. (Ⅱ)由 1.2.2(Ⅱ)知. 证毕.

1.2.5 定理 以一切序数为元的集不存在.

证 若存在一个以一切序数为元的集 A,则根据概括公理模式,$C=\{\alpha\in A:\alpha$ 是序数$\}$是一个集. 由 1.2.3(Ⅰ)及 1.2.2(Ⅰ)知 C 是序数. 于是有 $C\in C$,与 1.2.2(Ⅲ)矛盾. 证毕.

1.2.6 定义 (Ⅰ) $S(x)=x\cup\{x\}$ 叫 x 的**后继**.

(Ⅱ) α 是**后继序数**,如果$\exists\ \beta(\alpha=S(\beta))$. α 是**极限序数**,如果 $\alpha\neq 0$ 且 α 不是后继序数.

1.2.7 定义 (Ⅰ) $0=\varnothing,1=S(0),2=S(1),3=S(2)$,等等.

(Ⅱ) 一个序数 α 是**自然数**,如果

$$\forall\ \beta(\beta\leqslant\alpha\rightarrow\beta=0\vee\beta\text{ 是后继序数}).$$

今后用 m,n,i,j,k,等等表示自然数.

1.2.8 引理 (Ⅰ) $S(\alpha)$是大于 α 的最小序数.

(Ⅱ) 0,1,2,3,4 等皆为自然数.

(Ⅲ) 若 n 是自然数,则$\forall\ \alpha(\alpha<n\rightarrow\alpha$ 是自然数).

(Ⅳ) 每个非零自然数都是后继序数.

(Ⅴ) 若 n 为自然数,则 $S(n)$亦是.

1.2.9 无限性公理

$$\exists\ x(0\in x\wedge\forall\ y(y\in x\rightarrow S(y)\in x)).$$

1.2.10 定义 $\omega=\{n:n$ 是自然数$\}$叫**自然数集**.

上面定义中的 ω 确为一个集. 事实上,设 A 是满足无限性公理的任一集. 据概括公理模式,$B=\{n\in A:n$ 是自然数$\}$是一个集. 若$\exists\ n\in\omega\backslash B$,则由 $0\in A$ 知 $n\neq 0$. 据 1.2.8(Ⅳ),$\exists\beta\in n\backslash A\neq\varnothing$. 设 n'是 $n\backslash A$ 在$\langle n,<\rangle$内的最小元,则 $n'\neq 0$,从而$\exists\ \beta',n'=S(\beta')$. $\beta'\in n'\backslash A,n'<n,n'\backslash A$ 在$\langle n,<\rangle$内又有最小元 k. $k\in n\backslash A$ 且 $k<n'$,矛盾.

故 $\omega=B$. 实际上,我们有

$$\omega=\bigcap\{A: 0\in A\wedge\forall x(x\in A\rightarrow S(x)\in A)\}.$$

1.2.11 定理 (Peano 公设)(Ⅰ) $0\in\omega$.

(Ⅱ) $\forall m,n\in\omega(m\neq n\rightarrow S(m)\neq S(n))$.

(Ⅲ) $\forall n\in\omega(S(n)\in\omega)$.

(Ⅳ) (归纳法)对任意的 $A\subset\omega$,若

$$0\in A\text{ 且}\forall n(n\in A\rightarrow S(n)\in A),\text{则 }A=\omega.$$

证 (Ⅰ),(Ⅱ)是显然的. (Ⅲ)由 1.2.8(Ⅴ)知. 下证(Ⅳ). 设 $A\subset\omega$ 合(Ⅳ)中的假设条件. 若 $A\neq\omega$,则 $\omega\backslash A$ 在良序集 $\langle\omega,<\rangle$ 内有最小元 m. 因 $0\in A,m\neq 0$,故 $\exists\ \alpha,m=S(\alpha)$. $\alpha\in\omega$ 且 $\alpha<m$,故 $\alpha\in A$. 于是 $m=S(\alpha)\in A$,矛盾. 故 $A=\omega$. 证毕.

1.2.12 引理 ω 是最小的极限序数.

证 由 1.2.3(Ⅱ)知,ω 是序数. 由 1.2.11(Ⅲ)知,ω 是极限序数. 由 1.2.8(Ⅳ)知,ω 是最小的极限序数. 证毕.

1.2.13 引理 设 $\langle A,R\rangle$ 是良序集,使得 $\forall x\in A,\exists\beta_x,\beta_x$ 是序数且 $\langle\mathrm{pred}(A,x,R),R\rangle\cong\langle\beta_x,<\rangle$,则 $\exists\alpha,\langle A,R\rangle\cong\langle\alpha,<\rangle$.

证 $\forall x\in A$,由假设,1.2.2 及 1.1.16 知,

$$\exists!\beta_x\exists!g_x(g_x:\langle\mathrm{pred}(A,x,R),R\rangle\cong\langle\beta_x,<\rangle).$$

据替换公理模式,$C=\{\beta_x: x\in A\}$ 是一个集. $\forall x\in A$,令 $f(x)=\beta_x$,则 $f: A\rightarrow C$. 现证:

$$\forall x,y\in A,\text{若 }xRy,\text{则 }g_y(x)=f(x). \tag{1}$$

事实上,若 xRy,则 $\mathrm{pred}(A,x,R)=\mathrm{pred}(\mathrm{pred}(A,y,R),x,R)$. $g_y:\langle\mathrm{pred}(A,y,R),R\rangle\cong\langle\beta_y,<\rangle$. 令 $g'_y=g_y|\mathrm{pred}(A,x,R)$. 据 1.1.16 (Ⅳ)有

$$g'_y:\langle\mathrm{pred}(A,x,R),R\rangle\cong\langle\mathrm{pred}(\beta_y,g_y(x),<),<\rangle$$
$$=\langle g_y(x),<\rangle.$$

另方面，

$$g_x:\langle \mathrm{pred}(A,x,R),R\rangle\cong\langle\beta_x,<\rangle.$$

据 1.2.2(Ⅰ)知，$f(x)=\beta_x=g_y(x)$. (1)真.

由(1)知，C 是传递集. 于是 C 是序数. 显然 $f:A\to C$ 是满的. 设 $x,y\in A$，使得 xRy，则 $x\in\mathrm{pred}(A,y,R)$，$g_y(x)\in\beta_y$. 由(1)知，

$$f(x)=g_y(x)<\beta_y=f(y).$$

f 是严格增的，结果

$$f:\langle A,R\rangle\cong\langle C,<\rangle.\quad \text{证毕.}$$

1.2.14　定理　设 $\langle A,R\rangle$ 是任一良序集，则

$$\exists!\alpha(\langle A,R\rangle\cong\langle\alpha,<\rangle).$$

证　唯一性由 **1.2.2(Ⅰ)** 知，下证存在性.

令

$$B=\{x\in A:\forall\beta(\neg(\langle\mathrm{pred}(A,x,R),R\rangle\cong\langle\beta,<\rangle))\}.$$

若 $B\neq\varnothing$，则 B 有最小元 b. $\forall x\in\mathrm{pred}(A,b,R)$，$x\notin B$，于是 $\exists\beta_x$，

$$\langle\mathrm{pred}(A,x,R),R\rangle\cong\langle\beta_x,<\rangle.$$

因 $\mathrm{pred}(A,x,R)=\mathrm{pred}(\mathrm{pred}(A,b,R),x,R)$. 据 1.2.13，

$$\exists\beta(\langle\mathrm{pred}(A,b,R),R\rangle\cong\langle\beta,<\rangle).$$

则 $b\notin B$，矛盾. 故 $B=\varnothing$. $\forall x\in A$，$x\notin B$，从而

$$\exists\beta_x(\langle\mathrm{pred}(A,x,R),R\rangle\cong\langle\beta_x,<\rangle).$$

据 1.2.13，

$$\exists\alpha(\langle A,R\rangle\cong\langle\alpha,<\rangle).\quad \text{证毕.}$$

1.2.15　定义　设 $\langle A,R\rangle$ 是良序集，则 $\mathrm{otp}(A,R)$ 是使得 $\langle A,R\rangle\cong\langle\alpha,<\rangle$ 的唯一序数 α.

由 **1.2.2(Ⅰ)** 知对任意的良序集 $\langle A,R\rangle$，$\langle B,S\rangle$ 有

$$\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle\leftrightarrow\mathrm{otp}(A,R)=\mathrm{otp}(B,S).$$

1.2.16　定义　设 $\langle A,R\rangle$，$\langle B,S\rangle$ 是二良序集.

（Ⅰ）在 $A\times B$ 上定义一个关系 $R\odot S$ 如下：

$$\langle x,y\rangle R\odot S\langle u,v\rangle\leftrightarrow(ySv\vee(y=v\wedge xRu)).$$

易知 $\langle A\times B,R\odot S\rangle$ 是良序集.

（Ⅱ）若 $A\cap B=\varnothing$，在 $A\cup B$ 上定义一个关系：$R\oplus S=R\cup S\cup(A\times B)$，则 $\langle A\cup B,R\oplus S\rangle$ 是良序集.

$\forall\alpha,n=0,1$，令

$$<_\alpha=\{\langle x,y\rangle:x,y\in\alpha,x<y\}.$$

$$<_\alpha^n=\{\langle\langle x,n\rangle,\langle y,n\rangle\rangle:x,y\in\alpha,x<y\}.$$

1.2.17　定义　（Ⅰ）$\alpha\oplus\beta=\text{otp}(\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\},<_\alpha^0\oplus<_\beta^1)$ 称为序数 α 与 β 的和.

（Ⅱ）$\alpha\odot\beta=\text{otp}(\alpha\times\beta,<_\alpha\odot<_\beta)$ 称为 α 与 β 的积.

注　设 $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ 是任意的良序集，使得

$$\alpha=\text{otp}(A,R),\qquad\beta=\text{otp}(B,S).$$

则

$$\alpha\odot\beta=\text{otp}(A\times B,R\odot S).$$

若 $A\cap B=\varnothing$，则

$$\alpha\oplus\beta=\text{otp}(A\cup B,R\oplus S).$$

称良序集 $\langle B,S\rangle$ 是良序集 $\langle A,R\rangle$ 的**延长**，如果 $A\subset B,R\subset S$ 且 $\forall x\in A,\forall y\in B\setminus A(xSy)$.

1.2.18　引理　设 $\forall s\in S$，$\langle A_s,R_s\rangle$ 是良序集且它们中的任意两个必有一个是另一个的延长. 令 $A=\bigcup\{A_s:s\in S\}$，$R=\bigcup\{R_s:s\in S\}$，则 $\langle A,R\rangle$ 是良序集且

$$\text{otp}(A,R)=\bigcup\{\text{otp}(A_s,R_s):s\in S\}.$$

证　$\forall s\in S$，据 1.2.14 及 1.1.16 有

$$\exists!\alpha_s=\text{otp}(A_s,R_s)\text{且}\exists!f_s:\langle A_s,R_s\rangle\cong\langle\alpha_s,<\rangle.$$

现证明下式：

若$\langle A_t,R_t\rangle$是$\langle A_s,R_s\rangle$的延长,则 $f_s=f_t|A_s$　　　　(1)

令 $E=\{x\in A_s : f_s(x)=f_t(x)\}$,只需证明 $E=A_s$. 反证. 若 $A_s\setminus E\neq\varnothing$,则有 R_s-最小元 $a\in A_s\setminus E$. 又需证明:

$$f_s(a)=f_t(a) \tag{2}$$

事实上,设 $y\in f_s(a)$,则 $y\in f_s(a)\subset\alpha_s$,$\exists\, u\in A_s f_s(u)=y<f_s(a)$, uR_sa. 由 a 的定义知,$u\in E$,$y=f_s(u)=f_t(u)$. 又由(1)的假设,$u,a\in A_s\subset A_t$,$\langle u,a\rangle\in R_s\subset R_t$,$uR_ta$,$y=f_t(u)\in f_t(a)$.

反之,设 $y\in f_t(a)$,则$\exists\, u\in A_t.f_t(u)=y<f_t(a)$,$uR_ta$,$u\neq a$. 若 $u\in A_t\setminus A_s$,因 $a\in A_s$,由延长的定义,aR_tu,矛盾. 故 $u\in A_s$,于是 uR_sa,从而 $f_s(u)<f_s(a)$且由 a 的定义知,$u\in E$,因而 $y=f_t(u)=f_s(u)\in f_s(a)$. (2)真.

由(2)知,$a\in E$. 这与 a 是 $A_s\setminus E$ 的最小元矛盾. 故 $E=A_s$. (1)真.

令
$$f=\bigcup\{f_s : s\in S\},$$
$$A=\bigcup\{A_s : s\in S\}=\bigcup\{\mathrm{dom}(f_s) : s\in S\}=\mathrm{dom}(f),$$
$$\alpha=\bigcup\{\alpha_s : s\in S\}=\bigcup\{\mathrm{ran}(f_s) : s\in S\}=\mathrm{ran}(f).$$

则 $f: A\to\alpha$ 是 1—1 满函数. R 是 A 上的关系.

再来证明:

$$\forall x,y\in A(xRy\leftrightarrow f(x)<f(y)). \tag{3}$$

设 $x,y\in A$. 若$\langle x,y\rangle\in R$,则$\exists\, s\in S$,$\langle x,y\rangle\in R_s$. $f_s(x)<f_s(y)$. $\langle x,f_s(x)\rangle,\langle y,f_s(y)\rangle\in f_s\subset f$,则

$$f(x)=f_s(x)<f_s(y)=f(y).$$

反之,设 $f(x)<f(y)$,则$\langle x,f(x)\rangle,\langle y,f(y)\rangle\in f$,$\exists\, s,t\in S$,$\langle x,f(x)\rangle\in f_s$,$\langle y,f(y)\rangle\in f_t$. 由假设,不妨设$\langle A_t,R_t\rangle$是$\langle A_s,R_s\rangle$的延长,因 $x\in\mathrm{dom}(f_s)=A_s$,由(1)知,

$$f_t(x)=f_s(x)=f(x)<f(y)=f_t(y).$$

从而 f_t 严格增的，xR_ty，$\langle x,y\rangle\in R_t\subset R$，(3)真.

由(3)易知，$\langle A,R\rangle$ 是良序集且 $f:\langle A,R\rangle\cong\langle\alpha,<\rangle$.

最后有，

$\mathrm{otp}(A,R)=\alpha=\bigcup\{\alpha_s : s\in S\}=\bigcup\{\mathrm{otp}(A_s,R_s) : s\in S\}$. 引理证毕.

1.2.19 引理 对任意的 α,β,γ，

(Ⅰ) $\alpha\oplus(\beta\oplus\gamma)=(\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma$.

(Ⅱ) $\alpha\oplus 0=0\oplus\alpha=\alpha$.

(Ⅲ) $\alpha\oplus 1=S(\alpha)$.

(Ⅳ) $\alpha\oplus S(\beta)=S(\alpha\oplus\beta)$.

(Ⅴ) 若 β 是极限序数，则

$$\alpha\oplus\beta=\bigcup\{\alpha\oplus\xi : \xi<\beta\}.$$

证 (Ⅰ)—(Ⅳ)由序数和的定义直接知.

(Ⅴ) $\forall\gamma$，令 $A_\gamma=\alpha\times\{0\}\cup\gamma\times\{1\}$，$R_\gamma=<^0_\alpha\oplus<^1_\gamma$ 则 $\alpha\oplus\gamma=\mathrm{otp}(A_\gamma,R_\gamma)$. 易知，$\forall\xi,\eta<\beta$，若 $\xi\leqslant\eta$，则 $\langle A_\eta,R_\eta\rangle$ 是 $\langle A_\xi,R_\xi\rangle$ 的延长.

$$A_\beta=\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}=\bigcup\{A_\xi : \xi<\beta\}.$$

$$R_\beta=<^0_\alpha\oplus<^1_\beta=\bigcup\{R_\xi : \xi<\beta\}.$$

据 1.2.18，$\langle A_\beta,R_\beta\rangle$ 是良序集且

$$\alpha\oplus\beta=\mathrm{otp}(A_\beta,R_\beta)=\bigcup\{\mathrm{otp}(A_\xi,R_\xi) : \xi<\beta\}$$
$$=\bigcup\{\alpha\oplus\xi : \xi<\beta\},$$

证毕.

上面的性质表明序数和满足结合律. 但交换律不成立，例如有 $1\oplus\omega=\omega\neq\omega\oplus 1$.

1.2.20 引理 $\forall\alpha,\beta,\gamma$，

(Ⅰ) $\alpha\odot(\beta\odot\gamma)=(\alpha\odot\beta)\odot\gamma$.

(Ⅱ) $\alpha\odot 0=0\odot\alpha=0$.

（Ⅲ）　$\alpha\odot 1=1\odot\alpha=\alpha$.

（Ⅳ）　$\alpha\odot(\beta\oplus\gamma)=(\alpha\odot\beta)\oplus(\alpha\odot\gamma)$.

（Ⅴ）　$\alpha\odot S(\beta)=(\alpha\odot\beta)\oplus\alpha$.

（Ⅵ）　若 β 是极限序数，则 $\alpha\odot\beta=\bigcup\{\alpha\odot\xi : \xi<\beta\}$.

证　（Ⅰ）—（Ⅴ）由相应的定义直接知．（Ⅵ）的证法与 1.2.19（Ⅴ）相同.

序数的积也不可交换，例如 $2\odot\omega\neq\omega\odot 2$，上面的（Ⅳ）叫左分配律，应该注意，右分配律不成立．例如，

$$(1\oplus 1)\odot\omega=2\odot\omega\neq\omega\odot 2=(1\odot\omega)\oplus(1\odot\omega).$$

1.2.21　引理　（Ⅰ）　若 $\beta<\gamma$，则 $\alpha\oplus\beta<\alpha\oplus\gamma$.

（Ⅱ）　若 $\alpha\leqslant\beta$，则 $\exists!\ \gamma,\alpha\oplus\gamma=\beta$.

证　（Ⅰ）设 $\beta<\gamma$，则

$$\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}=\mathrm{pred}(\alpha\times\{0\}\cup\gamma\times\{1\},\langle\beta,1\rangle,<_\alpha^0\oplus<_\gamma^1).$$

因为

$$\alpha\oplus\beta=\mathrm{otp}(\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\},$$
$$<_\alpha^0\oplus<_\beta^1),$$

$$\alpha\oplus\gamma=\mathrm{otp}(\alpha\times\{0\}\cup\gamma\times\{1\},<_\alpha^0\oplus<_\gamma^1).$$

有

$\langle\alpha\oplus\beta,<\rangle\cong\langle\mathrm{pred}(\alpha\times\{0\}\cup\gamma\times\{1\},\langle\beta,1\rangle,<_\alpha^0\oplus<_\gamma^1),<_\alpha^0\oplus<_\gamma^1\rangle$．若 $\alpha\oplus\beta\geqslant\alpha\oplus\gamma$，与 1.1.16（Ⅱ）矛盾，故 $\alpha\oplus\beta<\alpha\oplus\gamma$.

（Ⅱ）令 $A=\{\xi : \alpha\oplus\xi\leqslant\beta\}$，则 $\gamma=\bigcup A$ 是序数．若 γ 是极限序数，则由（Ⅰ）知，$\forall\xi<\gamma,\alpha\oplus\xi\subset\beta$．于是，

$$\alpha\oplus\gamma=\bigcup\{\alpha\oplus\xi : \xi<\gamma\}\subset\beta.$$

若 $\gamma=\delta+1$ 是后继序数，则 $\delta\in\gamma$，从而 $\alpha\oplus\delta<\beta$. 于是，

$$\alpha\oplus\gamma=S(\alpha\oplus\delta)\leqslant\beta,$$

即有 $\alpha\oplus\gamma\leqslant\beta$. 若 $\alpha\oplus\gamma<\beta$, 则 $\alpha\oplus S(\gamma)=S(\alpha\oplus\gamma)\leqslant\beta$, $\gamma\in S(\gamma)\in A$, $\gamma\in\gamma$, 矛盾. 故 $\alpha\oplus\gamma=\beta$. 若$\exists\ \gamma'$使 $\alpha\oplus\gamma'=\beta$, 则由(Ⅰ)知 $\gamma=\gamma'$. 证毕.

在本节的最后部分, 我们来介绍序数上的超限归纳法和超限递归定理. 为了表达方便, 我们用类来代替公式. 在上一节我们已经介绍过由一切集构成的万有类 V, 现在让 On 表示由一切序数构成的总体, 据 1.2.5, On 不是集, 即它是一个真类.

1.2.22 定理 (Ⅰ) 若 $A\subset On$ 且 $A\neq\varnothing$, 则 A 有最小元.

(Ⅱ) (超限归纳法) 设 $B\subset A\subset On$, 使得

$$\forall\alpha\in A(\mathrm{pred}(A,\alpha,<)\subset B\rightarrow\alpha\in B), \text{则 } B=A.$$

证 (Ⅰ)任取 $\alpha\in A$. 若 α 不是 A 的最小元, 则$\exists\beta\in A$, $\beta<\alpha$. 于是 $A\cap\alpha\neq\varnothing$, 它在$\langle\alpha,<\rangle$内的最小元设为 γ, 则 γ 即为 A 的最小元.

(Ⅱ) 若 $A\backslash B\neq\varnothing$, 据(Ⅰ)它有最小元 α, 则 $\mathrm{pred}(A,\alpha,<)\subset B$. 由假设 $\alpha\in B$, 矛盾. 证毕.

1.2.23 定理 (On 上的超限递归) 设 $G:V\rightarrow V$, 则存在唯一的 $F:On\rightarrow V$, 使得

$$\forall\alpha(F(\alpha)=G(F|\alpha)). \tag{1}$$

证 先证 F 的唯一性. 若存在 $F_1,F_2:On\rightarrow V$ 且皆满足(1)式. 则 $F_1(0)=G(F_1|0)=G(\varnothing)=F_2(0)$. 现设 $\alpha>0$, 且设$\forall\beta<\alpha$, $F_1(\beta)=F_2(\beta)$, 则 $F_1|\alpha=F_2|\alpha$,

$$F(\alpha)=G(F_1|\alpha)=G(F_2|\alpha)=F_2(\alpha).$$

由超限归纳法知, $\forall\alpha$, $F_1(\alpha)=F_2(\alpha)$, 即 $F_1=F_2$.

下证 F 的存在性.

我们称函数 $g_\alpha:\alpha\oplus1\rightarrow V$ 是 G 的 α-近似, 如果

$$\forall\beta\leqslant\alpha\ (g_\alpha(\beta)=G(g_\alpha|\beta)).$$

论断 1　$\forall\alpha$，G 有唯一的 α-近似 g_α.

证　令 $g_0(0)=G(0)$，则 g_0 是 G 的唯一的 0-近似. 现设 $\alpha>0$ 且设 $\forall\beta<\alpha$，G 有唯一的 β-近似 g_β.

令

$$f=\bigcup\{g_\beta:\beta<\alpha\},$$

$$\mathrm{dom}(f)=\bigcup\{\mathrm{dom}(g_\beta):\beta<\alpha\}=\alpha.$$

易知，若 $\gamma\leqslant\beta<\alpha$，则 $g_\gamma=g_\beta|\gamma\oplus1$. 由此可知，$f$ 是函数. 从而 $g_\alpha=f\cup\{\langle\alpha,G(f)\rangle\}$是函数且 $\mathrm{dom}(g_\alpha)=\alpha\oplus1$. 易知

$$\forall\beta<\alpha\forall\delta\leqslant\beta\oplus1(g_\alpha|\delta=g_\beta|\delta). \tag{2}$$

由此可知，$\forall\beta\leqslant\alpha$，$g_\alpha(\beta)=G(g_\alpha|\beta)$，即 g_α 是 G 的 α-近似. 用超限归纳法可证 g_α 是 G 的唯一的 α-近似. 据超限归纳法，论断 1 成立.

$\forall\alpha$，令 $F(\alpha)=g_\alpha(\alpha)$，则 $F:On\to V$. 又由(2)知，$\forall\alpha$，$F|\alpha=g_\alpha|\alpha$. 故

$\forall\alpha$，$F(\alpha)=g_\alpha(\alpha)=G(g_\alpha|\alpha)=G(F|\alpha)$. 证毕.

1.2.24　定义　α^β 用 β 上的递归方法定义如下：

(Ⅰ)　$\alpha^0=1$.

(Ⅱ)　$\alpha^{\beta\oplus1}=\alpha^\beta\odot\alpha$.

(Ⅲ)　若 β 是极限序数，则

$$\alpha^\beta=\bigcup\{\alpha^\xi:\xi<\beta\}.$$

1.2.25　定义　(Ⅰ)　$\forall n<\omega$，$A^n={}^nA=\{s:s:n\to A\}$.

(Ⅱ)　$A^{<\omega}=\bigcup\{A^n:n<\omega\}$.

(Ⅲ)　$\forall n\in N$，$\langle x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\rangle$表示定义域为 n 的函数 s，使得 $\forall i\leqslant n-1$，$s(i)=x_i$.

(Ⅳ)　设 $n<\omega$，$s\in A^n$ 且 $x\in A$，则 $s+x$ 表示 s 的扩张 $t\in A^{n+1}$ 使得 $t|n=s$ 且 $t(n)=x$.

§1.3 基 数

如果一个集的元的个数是有限的,即是一个自然数,我们就可用这个自然数来表征这个集的大小. 如果一个集的元的个数不是有限的,就不能用上面的方法来表征其大小了. 本节首先用1-1函数来比较两个集的大小关系. 然后引入基数的概念,使得每个集都可以用一个基数来表征它的大小. 这个基数也叫对应集的势. 本节还将介绍基数的运算以及一类重要的基数——正则基数的概念和性质.

1.3.1 定义 (Ⅰ) $A\lesssim B$,如果$\exists f: A\to B$是1-1的. $A\not\lesssim B$表示$\neg(A\lesssim B)$.

(Ⅱ) $A\prec B$,如果$A\lesssim B$且$B\not\lesssim A$.

(Ⅲ) $A\approx B$,如果$\exists f: A\to B$是1-1的和满的. $A\not\approx B$表示$\neg(A\approx B)$.

显然,$\lesssim$是集间的传递关系,而$\approx$是等价关系.

1.3.2 定理 (Cantor - Bernstein)若$A\lesssim B$且$B\lesssim A$,则$A\approx B$.

证明见蒲保明等[1985]定理1.4.5.

由此定理,显见

$$A\lesssim B\leftrightarrow A\prec B\vee A\approx B$$

$$A\prec B\leftrightarrow A\lesssim B\wedge A\not\approx B$$

设A是任一集. 据良序原理,A上有一个良序R. 据1.2.14,$\exists!\alpha,\langle\alpha,<\rangle\cong\langle A,R\rangle$,从而$\alpha\approx A$. 这种$\alpha$的最小者叫$A$的势.

1.3.3 定义 A的势$|A|$定义为

$$|A|=\min\{\alpha:\alpha\approx A\}.$$

显然有$|A|\approx A$,且对任意α,$|\alpha|\leqslant\alpha$. 当$|\alpha|=\alpha$时,称α是基数.

1.3.4 定义 α是一个基数,如果$|\alpha|=\alpha$. 显然,

$$\alpha\text{是一个基数}\leftrightarrow\forall\beta<\alpha(\beta\not\approx\alpha).$$

今后用希腊字母$\kappa,\lambda,\mu,\upsilon$表示基数.

1.3.5 引理 (Ⅰ) $A\approx B\leftrightarrow|A|=|B|$.

(Ⅱ) $A\prec B\leftrightarrow|A|<|B|$.

(Ⅲ) $|A|$是基数.

(Ⅳ) 若$|\alpha|\leqslant\beta\leqslant\alpha$,则$|\beta|=|\alpha|$.

证 (Ⅰ) 设$A\approx B$,因$|A|\approx A$,$|A|\approx B$,故$|B|\leqslant|A|$,同理有$|A|\leqslant|B|$. 故$|A|=|B|$,反之,若$|A|=|B|$,则显然有$A\approx B$.

(Ⅱ) 设$A\prec B$,则$A\precsim B$且$B\not\precsim A$. 若$|A|\geqslant|B|$,则$B\approx|B|\subset|A|\approx A$,$B\precsim A$,矛盾. 故$|A|<|B|$,反之,设$|A|<|B|$,则$|A|\neq|B|$且$A\approx|A|\subset|B|\approx B$,$A\precsim B$. 再由(Ⅰ)知$A\not\approx B$,故$A\prec B$.

(Ⅲ) 因$|A|$是序数且$|A|\approx A$,据(Ⅰ),$||A||=|A|$. 因此$|A|$是基数.

(Ⅳ) 因$\beta\leqslant\alpha$,$\beta\subset\alpha$,$\beta\precsim\alpha$. 另一方面,$\alpha\approx|\alpha|\subset\beta$,$\alpha\precsim\beta$. 据1.3.2,$\alpha\approx\beta$,$|\alpha|=|\beta|$. 证毕.

1.3.6 定理 (Cantor) $A\prec P(A)$,此处$P(A)$是A的幂集.

证 见蒲保明等[1985]定理1.4.10.

下面引入的基数加法、乘法和乘方运算与序数的对应运算是不同的. 为此,我们使用与前不同的加法和乘法运算符号.

1.3.7 定义 (Ⅰ) $\kappa\dotplus\lambda=|\kappa\times\{0\}\cup\lambda\times\{1\}|$叫$\kappa$与$\lambda$的和.

(Ⅱ) $\kappa\cdot\lambda=|\kappa\times\lambda|$叫$\kappa$与$\lambda$的积.

(Ⅲ) $\kappa^{\lambda}=|{}^{\lambda}\kappa|$叫$\kappa$的$\lambda$次方.

设 A,B 是任意的集，使得 $\kappa=|A|,\lambda=|B|$. 则易知

$$\kappa\cdot\lambda=|A\times B|,\qquad \kappa^{\lambda}=|{}^{B}A|.$$

若 $A\cap B=\varnothing$，则 $\kappa+\lambda=|A\cup B|$.

1.3.8 引理 (Ⅰ) $\kappa+0=\kappa\cdot 1=\kappa,\kappa\cdot 0=0$.

(Ⅱ) $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa=|\kappa\oplus\lambda|,\kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\kappa=|\kappa\odot\lambda|$.

(Ⅲ) $\kappa\cdot(\lambda+\mu)=(\kappa\cdot\lambda)+(\kappa\cdot\mu)$.

(Ⅳ) $\kappa+(\lambda+\mu)=(\kappa+\lambda)+\mu,\kappa\cdot(\lambda\cdot\mu)=(\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu$.

(Ⅴ) $\kappa^{\lambda+\mu}=\kappa^{\lambda}\cdot\kappa^{\mu}$.

(Ⅵ) $(\kappa\cdot\lambda)^{\mu}=\kappa^{\mu}\cdot\lambda^{\mu}$.

(Ⅶ) $(\kappa^{\lambda})^{\mu}=\kappa^{\lambda\cdot\mu}$.

由(Ⅱ)可知，

$$\omega+1=1+\omega=|1\oplus\omega|=\omega<\omega\oplus 1,$$

$$\omega\cdot 2=2\cdot\omega=|2\odot\omega|=\omega<\omega\oplus\omega=\omega\odot 2.$$

可见，序数的加法与乘法不同于基数的对应运算.

1.3.9 引理 (Ⅰ) 若 $\kappa\leqslant\lambda$，则

$$\kappa+\mu\leqslant\lambda+\mu,\kappa\cdot\mu\leqslant\lambda\cdot\mu \text{ 且 } \kappa^{\mu}\leqslant\lambda^{\mu}.$$

(Ⅱ) 若 $\kappa\leqslant\lambda$ 且 κ 与 μ 不同时为零，则 $\mu^{\kappa}\leqslant\mu^{\lambda}$.

(Ⅲ) $2^{\lambda}=|P(\lambda)|>\lambda$.

证 (Ⅰ)和(Ⅱ)由有关定义直接知. 现证(Ⅲ). 据 1.3.6，$\lambda\prec P(\lambda)$. 据 1.3.5，$\lambda=|\lambda|<|P(\lambda)|$. 其次，$\forall A\subset\lambda$，令

$$f_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A,\\ 0, & \text{当 } x\in\lambda\setminus A.\end{cases}$$

再令 $\varphi(A)=f_A$. 则 $\varphi:P(\lambda)\to{}^{\lambda}2$ 是 1-1 满函数，从而 $|P(\lambda)|=2^{\lambda}$. 证毕.

1.3.10 引理 (Ⅰ) $\forall n\in\omega(n\not\approx n\oplus 1)$.

(Ⅱ) $\forall n\in\omega(|n|=n)$.

(Ⅲ)　$\forall\alpha\forall n\in\omega(\alpha\approx n\to\alpha=n)$.

(Ⅳ)　ω是基数.

证　(Ⅰ)用归纳法直接可证.(Ⅱ)用归纳法并引用(Ⅰ)及1.3.5(Ⅳ).(Ⅳ)由(Ⅲ)知,现证(Ⅲ).设$\alpha\approx n$,则$|n|\leqslant\alpha$.据(Ⅱ),$n=|n|\leqslant\alpha$.若$n<\alpha$,$n\oplus 1\leqslant\alpha$.另一方面,又有$|\alpha|\leqslant n$.于是

$$n\oplus 1=|n\oplus 1|\leqslant|\alpha|\leqslant n<n\oplus 1,$$

矛盾.故$n=\alpha$.证毕.

我们记$N=\omega\setminus\{0\}$,叫**正整数集**.

作为序数乘方,易知$2^\omega=\bigcup\{2^n:n<\omega\}=\omega$.如看作基数乘方,由1.3.9知,$2^\omega=|P(\omega)|>\omega$.故序数的乘方运算也不同于基数的乘方运算.

1.3.11　定义　A是有限的如果$|A|<\omega$.A是**可数的**,如果$|A|\leqslant\omega$.非有限集叫**无限集**.非可数集叫**不可数集**.

1.3.12　引理　(Ⅰ)　$\forall m,n\in\omega$,

$$m+n=m\oplus n<\omega,m\cdot n=m\odot n<\omega.$$

(Ⅱ)　$\forall\alpha\geqslant\omega\forall m\in\omega(m\oplus\alpha=\alpha)$.

证　(Ⅰ)对任意固定的m,对n用归纳法可证.

(Ⅱ)对任意固定的m,对$\alpha\geqslant\omega$用超限归纳法来证.事实上,因ω是极限序数,

$$m\oplus\omega=\bigcup\{m\oplus n:n<\omega\}=\omega.$$

现设$\alpha>\omega$使得若$\omega\leqslant\xi<\alpha$,则$m\oplus\xi=\xi$.若$\alpha=\xi\oplus 1$,则$m\oplus\alpha=(m\oplus\xi)\oplus 1=\xi\oplus 1=\alpha$.若$\alpha$是极限序数,则

$$m\oplus\alpha=\bigcup\{m\oplus\xi:\xi<\alpha\}=\bigcup\alpha=\alpha,$$

证毕.

1.3.13　引理　每个无限基数是极限序数.

证　反证.若存在基数$\kappa\geqslant\omega$不是极限序数,因$\kappa>0$,κ是后继

序数. 设 $\kappa=\alpha\oplus 1$. 若 $\alpha<\omega$, 则 $\kappa=S(\alpha)<\omega$. 矛盾, 故 $\alpha\geqslant\omega$. 由 1.3.12(Ⅱ)知, $1\oplus\alpha=\alpha$. 则

$$|\alpha|=|1\oplus\alpha|=|\alpha\oplus 1|=|\kappa|.$$

于是 $\alpha\approx\kappa$ 且 $\alpha<S(\alpha)=\kappa$. 这与 κ 是基数相矛盾.

1.3.14　引理　$\omega\cdot\omega=\omega$.

1.3.15　定理　若 κ 是无限基数, 则 $\kappa\cdot\kappa=\kappa$.

证　为证定理, 我们先证下面论断 1 和论断 2.

论断 1　$\forall\kappa\geqslant\omega$, $\kappa\times\kappa$ 上有一个良序 R_κ 定义如下:

$\langle\alpha,\beta\rangle R_\kappa\langle\gamma,\delta\rangle\leftrightarrow\max\{\alpha,\beta\}<\max\{\gamma,\delta\}\vee\{\max\{\alpha,\beta\}=\max\{\gamma,\delta\}\wedge(\alpha<\gamma\vee(\alpha=\gamma\wedge\beta<\delta))\}$.

实际上, 容易直接验证 R_κ 是 $\kappa\times\kappa$ 上的全序. 下证它还是良序. 设 $\varnothing\neq A\subset\kappa\times\kappa$. 令

$$\delta=\min\{\max\{\alpha,\beta\}:\langle\alpha,\beta\rangle\in A\},$$

$$\alpha_0=\min\{\alpha<\kappa:\langle\alpha,\beta\rangle\in A\wedge\max\{\alpha,\beta\}=\delta\},$$

$$\beta_0=\min\{\beta<\kappa:\langle\alpha_0,\beta\rangle\in A\wedge\max\{\alpha_0,\beta\}=\delta\}.$$

容易验证, $\langle\alpha_0,\beta_0\rangle$ 即为 A 的 R_κ-最小元. 论断 1 真.

若 $\kappa\geqslant\omega$, 由 1.3.9 知, $\kappa\cdot\kappa\geqslant\kappa$. 只需再证对每个 $\kappa\geqslant\omega$, $\kappa\cdot\kappa\leqslant\kappa$. 我们对 $\kappa\geqslant\omega$ 用超限归纳法. 已知 $\omega\cdot\omega=\omega$. 现设 $\kappa>\omega$ 且 $\forall\lambda<\kappa$, $\lambda\cdot\lambda\leqslant\lambda$.

下证 $\kappa\cdot\kappa\leqslant\kappa$.

论断 2　$\mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,R_\kappa)\leqslant\kappa$.

证　若 $\mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,R_\kappa)=\gamma>\kappa$. 设

$$f:\langle\kappa\times\kappa,R_\kappa\rangle\cong\langle\gamma,<\rangle.$$

则 $\exists\langle\alpha,\beta\rangle\in\kappa\times\kappa$, $f(\alpha,\beta)=\kappa$. 令 $D=\mathrm{pred}(\kappa\times\kappa,\langle\alpha,\beta\rangle,R_\kappa)$, 则 $f[D]=\kappa$. 令 $\delta=\max\{\alpha,\beta\}\oplus 1$, 则 $D\subset\delta\times\delta$. 因 κ 是极限序数, $|\delta|\leqslant\delta<\kappa$. 由归纳法假设, $|D|\leqslant|\delta\times\delta|=||\delta|\times|\delta||=|\delta|\cdot|\delta|\leqslant|\delta|<\kappa$,

则 $\kappa=|\kappa|=|f[D]|=|D|<\kappa$. 矛盾,论断 2 真.

设 $\mathrm{otp}(\kappa\times\kappa,R_\kappa)=\gamma$,则 $\kappa\times\kappa\approx\gamma$,由论断 2 知,$\kappa\cdot\kappa=|\kappa\times\kappa|=|\gamma|\leqslant\gamma\leqslant\kappa$.

综上所论,定理得证.

1.3.16　系　设 κ 是无限基数.

(Ⅰ)　$\forall n\in\omega,n+\kappa=\kappa$;若 $n>0$,则 $n\cdot\kappa=\kappa$.

(Ⅱ)　设 λ 是无限基数,则

$$\kappa+\lambda=\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}.$$

(Ⅲ)　$|\kappa^{<\omega}|=\kappa$.

(Ⅳ)　若 $2\leqslant\lambda\leqslant\kappa$,则 $\lambda^\kappa=2^\kappa$.

证　(Ⅰ)由 1.3.8,1.3.9 及 1.3.15 知. (Ⅱ)由(Ⅰ)及 1.3.9 知. 对(Ⅲ)我们使用归纳法. 易见,$\forall n\in N,{}^n k\approx\kappa$. 设 $\varphi_n:{}^n\kappa\to\kappa$ 是 1-1 满函数. $\forall f\in{}^n\kappa$,令

$$\varphi_n^*(f)=\langle n,\varphi_n(f)\rangle.$$

则 $\varphi_n^*:{}^n\kappa\to N\times\kappa$. 再令

$$\varphi=\nabla\{\varphi_n^*:n\in N\}=\bigcup\{\varphi_n^*:n\in N\}.$$

则 $\varphi:\bigcup\{{}^n k:n\in N\}\to N\times\kappa$ 是 1—1 满函数. 于是

$$\begin{aligned}|\kappa^{<\omega}|&=|\bigcup\{{}^n\kappa:n\in\omega\}|\\&=|\bigcup\{{}^n k:n\in N\}|\\&=|N\times\kappa|=\omega\cdot\kappa=\kappa.\end{aligned}$$

(Ⅳ)　$\forall f\in{}^\kappa\kappa,f\subset\kappa\times\kappa$,则 ${}^\kappa\kappa\subset P(\kappa\times\kappa)$. 又,由 1.3.15 知,$\kappa\approx\kappa\times\kappa$. 故 $P(\kappa)\approx P(\kappa\times\kappa)$. 于是,由 1.3.9 知,

$${}^\kappa 2\subset{}^\kappa\lambda\subset{}^\kappa\kappa\subset P(\kappa\times\kappa)\approx P(\kappa)\approx{}^\kappa 2,$$

从而 ${}^\kappa 2\approx{}^\kappa\lambda,2^\kappa=\lambda^\kappa$. 证毕.

1.3.17　定理　$\forall\alpha\exists\kappa(\kappa$ 是基数 $\wedge\kappa>\alpha)$.

证　不妨设 $\alpha\geqslant\omega$,令

$W=\{\langle B,S\rangle : B\subset\alpha\wedge\langle B,S\rangle$是良序集$\}$,

$T=\{\mathrm{otp}(B,S) : \langle B,S\rangle\in W\}$. 则

$$T=\{\gamma : \gamma\lesssim\alpha\}. \tag{1}$$

事实上,设 $\gamma\lesssim\alpha$,则$\exists\ B\subset\alpha\exists\ f : \gamma\to B$ 是 1-1 满函数. 令

$$S=\{\langle f(x),f(y)\rangle : x,y\in\gamma\wedge x<y\}.$$

因 $\langle\gamma,<\rangle$是良序集,$\langle B,S\rangle\in W$ 且 $f : \langle\gamma,<\rangle\cong\langle B,S\rangle$. 于是 $\gamma=\mathrm{otp}(B,S)\in T$. 反之,设 $\gamma=\mathrm{otp}(B,S)\in T$,则 $\gamma\approx B\subset\alpha,\gamma\lesssim\alpha$. (1)真.

易知 T 是传递的,从而它是序数. 并且 $\kappa=T$ 就是大于 α 的基数. 证毕.

1.3.18 定义 (Ⅰ) $\alpha^+=\min\{\kappa : \kappa$是基数,且 $\kappa>\alpha\}$.

(Ⅱ) κ 是**后继基数**,如果$\exists\alpha(\kappa=\alpha^+)$.

(Ⅲ) κ 是**极限基数**,如果 $\kappa>\omega$ 且 κ 不是后继基数.

1.3.19 定义 ω_α 按超限递归方法,定义如下:

(a) $\omega_0=\omega$.

(b) $\omega_{\alpha\oplus1}=\omega_\alpha{}^+$.

(c) 若 γ 是极限序数,则 $\omega_\gamma=\bigcup\{\omega_\alpha : \alpha<\gamma\}$.

1.3.20 引理 (Ⅰ) 若 $\alpha<\beta$,则 $\omega_\alpha<\omega_\beta$.

(Ⅱ) $\forall\alpha(\omega_\alpha$是基数且 $\omega_\alpha\geqslant\alpha)$.

(Ⅲ) ω_α 是极限基数当且仅仅当 α 是极限序数 . ω_α 是后继基数当且仅当 α 是后继序数.

(Ⅳ) 每个无限基数是某个 ω_α.

证 (Ⅰ)固定 α,对 β 用超限归纳法可证. (Ⅱ)用超限归纳法可证. (Ⅲ)由有关定义直接知. 下证(Ⅳ).

设 $\kappa\geqslant\omega$,据 1.3.17 及(Ⅱ),$\exists\lambda,\omega_\lambda\geqslant\lambda>\kappa$. 故只需证下列

论断 1 $\forall\kappa\forall\alpha(\omega\leqslant\kappa<\omega_\alpha\to\exists\gamma<\alpha(\kappa=\omega_\gamma))$.

事实上,对 $\alpha\geqslant1$ 用超限归纳法. $\alpha=1$ 时显然真. 现设 $\alpha>1$ 且

设$\forall\beta<\alpha$，若$\omega\leqslant\kappa<\omega_\beta$，则$\exists\gamma<\beta(\kappa=\omega_\gamma)$. 设$\omega\leqslant\kappa<\omega_\alpha$. 若$\alpha=\xi\oplus1$，则$\kappa<\omega_{\xi\oplus1}=\omega_\xi^+$，$\kappa\leqslant\omega_\xi$. 由归纳法假设知，$\exists\gamma\leqslant\xi<\alpha$，$\kappa=\omega_\gamma$. 若$\alpha$是极限序数，因$\kappa\in\omega_\alpha=\bigcup\{\omega_\xi:\xi<\alpha\}$，$\exists\xi<\alpha$，$\kappa\in\omega_\xi$. 由归纳法假设，$\exists\gamma<\xi<\alpha$，$\kappa=\omega_\gamma$. 证毕.

1.3.21　引理　（Ⅰ）　若$\exists\ f:A\to B$是满的，则$|B|\leqslant|A|$.

（Ⅱ）　设$\kappa\geqslant\omega$且$\forall\alpha<\kappa$，$|A_\alpha|\leqslant\kappa$，则$|\bigcup\limits_{\alpha<\kappa}A_\alpha|\leqslant\kappa$.

证　（Ⅰ）设R是A上的良序. $\forall y\in B$，令$g(y)$是$f^{-1}(y)$的R-最小元. 则$g:B\to A$是1-1的，从而$B\lesssim A$，$|B|\leqslant|A|$.

（Ⅱ）$\forall\alpha<\kappa$，$|A_\alpha|\leqslant\kappa=|\kappa|$，则$\exists f_\alpha:A_\alpha\to\kappa$是1-1的. 令$g_\alpha(x)=\langle\alpha,f_\alpha(x)\rangle$，$x\in A_\alpha$. 则$g_\alpha:A_\alpha\to\kappa\times\kappa$. 易知

$$g=\nabla\{g_\alpha:\alpha<\kappa\}:\bigcup_{\alpha<\kappa}A_\alpha\to\kappa\times\kappa$$

是1-1的，$|\bigcup\limits_{\alpha<\kappa}A_\alpha|\leqslant|\kappa\times\kappa|=\kappa\cdot\kappa=\kappa$. 证毕.

1.3.22　定义　设β是极限序数.

（Ⅰ）　$A\subset\beta$在β内是**无界的**，如果$\bigcup A=\beta$.

（Ⅱ）　$f:\alpha\to\beta$是一个**共尾函数**，如果$f[\alpha]=\operatorname{ran}(f)$在$\beta$内是无界的.

1.3.23　定义　极限序数β的**共尾度**$\operatorname{cf}(\beta)$定义如下：

$\operatorname{cf}(\beta)=\min\{\alpha:\exists\ f:\alpha\to\beta$是共尾函数$\}$.

显然$\operatorname{cf}(\beta)\leqslant\beta$.

1.3.24　引理　设β是极限序数，则存在严格增的共尾函数

$$f:\operatorname{cf}(\beta)\to\beta.$$

证　设$g:\operatorname{cf}(\beta)\to\beta$是任意的共尾函数. 定义：

$$f(\eta)=\max\{g(\eta),\bigcup\{f(\xi)\oplus1:\xi<\eta\}\},\eta\in\operatorname{cf}(\beta).$$

易知$f:\operatorname{cf}(\beta)\to\beta$是严格增的共尾函数. 证毕.

1.3.25　引理　设α,β是极限序数.

（Ⅰ）　若存在严格增的共尾函数$g:\alpha\to\beta$，则$\operatorname{cf}(\alpha)=\operatorname{cf}(\beta)$.

（Ⅱ）　$\mathrm{cf}(\alpha)$是极限序数且$\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))=\mathrm{cf}(\alpha)$.

（Ⅲ）　$\mathrm{cf}(\alpha)=\mathrm{cf}(\omega_\alpha)$.

证　（Ⅰ）设$h:\mathrm{cf}(\alpha)\to\alpha$是共尾函数．则

$$g\circ h:\mathrm{cf}(\alpha)\to\beta$$

是共尾的，从而$\mathrm{cf}(\beta)\leqslant\mathrm{cf}(\alpha)$.

另一方面，设$f:\mathrm{cf}(\beta)\to\beta$是共尾函数.

定义：

$$k(\xi)=\min\{\eta\in\alpha:g(\eta)>f(\xi)\},\xi<\mathrm{cf}(\beta).$$

易知$k:\mathrm{cf}(\beta)\to\alpha$是共尾函数，从而$\mathrm{cf}(\alpha)\leqslant\mathrm{cf}(\beta)$．故$\mathrm{cf}(\alpha)=\mathrm{cf}(\beta)$.

（Ⅱ）与（Ⅲ）由（Ⅰ）知．证毕.

1.3.26　定义　一个极限序数β是正则的，如果$\mathrm{cf}(\beta)=\beta$.

由前一引理知，$\mathrm{cf}(\beta)$是正则的.

1.3.27　引理　（Ⅰ）　ω是正则的.

（Ⅱ）　若极限序数β是正则的，则β是基数.

（Ⅲ）　$\forall\ \kappa\geqslant\omega,\kappa^+$是正则的.

证　（Ⅰ）因ω是最小的极限序数，由1.3.25（Ⅱ）的前一结论知，ω是正则的.

（Ⅱ）由假设$\mathrm{cf}(\beta)=\beta$．设$g:\beta\to\beta$是共尾函数．反证．若$\exists\ \gamma<\beta,\gamma\approx\beta$．设$f:\gamma\to\beta$是$1-1$满函数，则$g\circ h:\gamma\to\beta$是共尾函数．于是$\beta=\mathrm{cf}(\beta)\leqslant\gamma<\beta$．矛盾．故$\beta$是基数.

（Ⅲ）设$\kappa\geqslant\omega$．据1.3.13，κ^+是极限序数．若$\mathrm{cf}(\kappa^+)=\lambda<\kappa^+$，$\lambda\leqslant\kappa$．据1.3.25，$\lambda$是正则的．据（Ⅱ）$\lambda$是基数．设$g:\lambda\to\kappa^+$是共尾函数．$\forall\ \xi<\lambda,g(\xi)\in\kappa^+$，令$A_\xi=g(\xi)$．$\forall\ \xi\in\kappa\setminus\lambda$，令$A_\xi=\varnothing$．则$\forall\ \xi<\kappa,|A_\xi|\leqslant\kappa$．因$k^+=\bigcup g[\lambda]\subset\bigcup\{A_\xi:\xi<\kappa\}$，由1.3.21知，$\kappa^+\leqslant|\bigcup\{A_\xi:\xi<\kappa\}|\leqslant\kappa<\kappa^+$，矛盾．故$\mathrm{cf}(\kappa^+)=\kappa^+$．证毕.

1.3.28　引理　（Ⅰ）（Kőnig）若 κ 是无限基数且 $\mathrm{cf}(\kappa)\leqslant\lambda$，则 $\kappa^{\lambda}>\kappa$.

（Ⅱ）若 κ 是无限基数，则 $\mathrm{cf}(2^{\kappa})>\kappa$.

证　（Ⅰ）因 $\mathrm{cf}(\kappa)\leqslant\lambda$，$\exists\ f:\lambda\to\kappa$ 是共尾函数. 若 $\kappa=\kappa^{\lambda}$，$\kappa\approx{}^{\lambda}\kappa$. 设 $g:\kappa\to{}^{\lambda}\kappa$ 是满函数.

定义：

$$h(\alpha)=\min(\kappa\setminus\{(g(\mu))(\alpha):\mu<f(\alpha)\}),\alpha<\lambda.$$

则 $h\in{}^{\lambda}\kappa$. $\exists\ \mu\in\kappa, g(\mu)=h$. $\mu\in\kappa=\bigcup f[\lambda]$，$\exists\ \alpha<\lambda,\mu<f(\alpha)$. 则

$$g(\mu)(\alpha)=h(\alpha)\in\kappa\setminus\{g(\gamma)(\alpha):\gamma<f(\alpha)\},$$

矛盾. 故 $\kappa<\kappa^{\lambda}$.

（Ⅱ）令 $\lambda=2^{\kappa}$. 反证，若 $\mathrm{cf}(\lambda)\leqslant\kappa$，据（Ⅰ），

$$2^{\kappa}=\lambda<\lambda^{\kappa}=(2^{\kappa})^{\kappa}=2^{\kappa\cdot\kappa}=2^{\kappa},$$

矛盾. 证毕.

1.3.29　定义　若 $|A|\geqslant\kappa$，则

$$[A]^{\kappa}=\{B\subset A:|B|=\kappa\},$$

$$[A]^{<\kappa}=\{B\subset A:|B|<\kappa\},$$

$$[A]^{\leqslant\kappa}=\{B\subset A:|B|\leqslant\kappa\}.$$

第二章 仿紧空间

在 60 年代以前，仿紧空间的定义和主要刻画是附加了正则或 T_2 分离公理的．近 30 年以来，随着研究的细致、深入，在不附加任何分离性的条件下，不断地发现了仿紧空间的新刻画．因此，本书中所谓的仿紧空间，并不附加任何分离公理．本章前两节介绍在正则或 T_2 空间范围内，仿紧空间的基本刻画和性质．§3 介绍 κ-仿紧空间，它不只是仿紧空间的一种形式上的推广，而是 Morita [1962]为了刻画积空间 $X\times I^\kappa$ 的正规性而自然地引进的．§4 介绍仿紧空间的一个有趣的子类，即强仿紧空间．

下面，拓扑空间简称**空间**．连续函数简称**映射**．我们一般假设 X,Y 等表示空间．设 $A\subset X$，X 内包含 A 的开集 U 叫 A 的**邻域**．当 $A=\{x\}$ 时，U 叫点 x 的邻域．A 的一切邻域构成的集叫 A 的邻域系，记为 $N(A)$．$N(\{x\})$ 简记为 $N(x)$．A 在 X 内的闭包记为 $\overline{A}$ 或 $\mathrm{Cl}(A)$，内部记为 A° 或 $\mathrm{Int}(A)$．当 $A\subset M\subset X$ 时，A 在子空间 M 内的闭包与内部分别记为 $\mathrm{Cl}_M(A)$ 和 $\mathrm{Int}_M(A)$．

X 的幂集 $P(X)=\{A: A\subset X\}$ 的子集又叫 X 内的**子集族**或**集族**．设 ξ 是 X 的子集族且 $G\subset X$，记

$$\xi|G=\{A\cap G: A\in\xi\}.$$

$$(\xi)_G=\{A\in\xi: A\cap G\neq\varnothing\},(\xi)_x=(\xi)_{\{x\}}.$$

$St(G,\xi)=\bigcup(\xi)_G$，叫 ξ 在 G 处的**星形**.

$St(x,\xi)=\bigcup(\xi)x$，叫 ξ 在点 x 处的**星形**.

$St^2(G,\xi)=St(St(G,\xi),\xi)$

$St^n(G,\xi)=St(St^{n-1}(G,\xi),\xi)$，$n\geqslant 2$.

我们用 R 表示实数集，同时也表其上赋予通常拓扑，即以所有开区间为基的拓扑的空间，叫**数直线**．同样的，序数 ω_0 也同时表示其上赋予序拓扑所成的空间（见蒲保明等[1985]2.2.11）．$\omega=\{0,1,2,\cdots\}$，$N=\omega\setminus\{0\}$，分别表自然数集与正整数集.

§2.1 正规覆盖

我们将在下一节中证明：一个正则空间是仿紧的当且仅当它的每个开覆盖是正规覆盖．正规覆盖是刻画仿紧性的基本概念．它还在正规空间理论和度量化定理等方面有重要应用．正规覆盖自身还具有一系列很好的刻画．本节主要介绍这些刻画．正规覆盖的应用将在后面的章节中介绍.

2.1.1 定义 设 ξ,η 是 X 的子集族.

（Ⅰ） η 是 ξ 的**部分加细**或 η **部分加细** ξ，如果 η 的每个元包含在 ξ 的某个元内，即

$$\forall B\in\eta\ \ \exists A\in\xi(B\subset A).$$

（Ⅱ） η 是 ξ 的**加细**，如果 η 是 ξ 的部分加细且 $\bigcup\eta=\bigcup\xi$.

（Ⅲ） 设 $A\subset X$，ξ 是 A 的**覆盖**，如果 $A\subset\bigcup\xi$，称 ξ 是**开（闭）的**，如果 ξ 的每个元是 X 的开（闭）集.

2.1.2 定义 设 ξ、η 是 X 的覆盖.

（Ⅰ） η 是 ξ 的**点星形加细**，如果族 $\{St(x,\eta):x\in X\}$ 是 ξ 的加

细.

(Ⅱ) η 是 ξ 的**星形加细**,如果族 $\{\mathrm{St}(B,\eta):B\in\eta\}$ 是 ξ 的加细.

显然,星形加细是点星形加细,点星形加细是加细.

2.1.3 引理 设 ξ,η,γ 是 X 的覆盖使得 γ 是 η 的点星形加细且 η 是 ξ 的点星形加细. 则 γ 是 ξ 的星形加细.

证 设 $C\in\gamma$. 任取 $a\in C$. 由假设存在 $A\in\xi$,$\mathrm{St}(a,\eta)\subset A$. 其次,$\forall x\in C$ $\exists B_x\in\eta$,使得 $\mathrm{St}(x,\gamma)\subset B_x$. 从而,$a\in\mathrm{St}(x,\gamma)\subset B_x$. 故

$$\mathrm{St}(x,\gamma)\subset B_x\subset\mathrm{St}(a,\eta)\subset A,$$

$$\mathrm{St}(C,\gamma)=\bigcup\{\mathrm{St}(x,\gamma):x\in C\}\subset A.$$ 证毕.

2.1.4 定义 (Ⅰ) 空间 X 的覆盖 ξ 是**正规的**,如果 ξ 是开覆盖且 X 有一列开复盖 $\langle\xi_n\rangle$,使得 $\xi_0=\xi$ 且 $\forall n<\omega$,ξ_{n+1} 是 ξ_n 的星形加细.

(Ⅱ) 空间 X 是**完满正规的**,如果 X 的每个开覆盖是正规的.

据 2.1.3,X 的开覆盖 ξ 是正规的当且仅当 X 有一列开覆盖 $\langle\eta_n\rangle$,使得 $\eta_0=\xi$ 且 $\forall n<\omega$,η_{n+1} 是 η_n 的点星形加细.

2.1.5 定义 设 $\xi,\eta,\eta_n(n<\omega)$ 皆是 X 的覆盖.

(Ⅰ) η 是 ξ 的**局部星形加细**,如果

$$\forall x\in X\ \exists G\in N(x)\ \exists U\in\xi\ (\mathrm{St}(G,\eta)\subset U).$$

(Ⅱ) $\langle\eta_n\rangle_{n<\omega}$ 是 ξ 的**局部星形加细序列**,如果

$$\forall x\in X\ \exists G\in N(x)\ \exists U\in\xi\ \exists n<\omega\ (\mathrm{St}(G,\eta_n)\subset U).$$

(Ⅲ) $\langle\eta_n\rangle$ 是**开的**,如果每个 η_n 是 X 的开覆盖.

2.1.6 定理 对任意空间 X,下列各条等价:

(Ⅰ) X 是完满正规的.

(Ⅱ) X 的每个开覆盖有开的星形加细.

(Ⅲ) X 的每个开覆盖有开的局部星形加细.

（Ⅳ）　（A. V. Arhangelskii[1961]）X 的每个开覆盖有开的局部星形加细序列.

（Ⅴ）　X 的每个开覆盖有开的点星形加细.

证　（Ⅰ）→（Ⅱ），（Ⅱ）→（Ⅲ）及（Ⅲ）→（Ⅳ）是显然的.（Ⅴ）→（Ⅰ）由 2.1.3 知. 这样，只需证明（Ⅳ）→（Ⅴ）：

设 ξ 是 X 的开覆盖. 由假设（Ⅳ），ξ 有开的局部星形加细序列 $\langle \eta_n \rangle_{n<\omega}$. 不妨设 η_{n+1} 是 η_n 的加细，$n<\omega$. $\forall n<\omega$，令

$$\varphi_n = \{G : G \text{ 开于 } X \text{ 且 } \exists V \in \eta_n \exists U \in \xi \, (G \subset V \text{ 且 } \mathrm{St}(G, \eta_n) \subset U\}.$$

现证 $\varphi = \bigcup_{n<\omega} \varphi_n$ 是 ξ 的开的点星形加细. 事实上，设 $x \in X$. 则 $\exists W \in N(x)$ $\exists U \in \xi$ $\exists n<\omega$，$\mathrm{St}(W, \eta_n) \subset U$. 另一方面，$\exists V \in \eta_n$，$x \in V$. 则 $x \in W \cap V \in \varphi_n$，故 φ 是 X 的开覆盖. 其次，$\forall G \in \varphi$，令

$$n(G) = \min\{n<\omega : G \in \varphi_n\}.$$

则 $G \in \varphi_{n(G)}$. 设 $x \in X$，令

$$n(x) = \min\{n(G) : G \in (\varphi)_x\}.$$

设 $G_0 \in (\varphi)_x$，使得 $n(x) = n(G_0)$. 则 $x \in G_0 \in \varphi_{n(x)}$. 于是 $\exists U \in \xi$，$\mathrm{St}(G_0, \eta_{n(x)}) \subset U$. 由此可知，$\mathrm{St}(x, \varphi) \subset U$. φ 是 ξ 的点星形加细. 证毕.

完满正规空间的另一些刻画将在 § 2.2 介绍.

2.1.7　定义　（Ⅰ）　函数 $\rho : X \times X \to R$ 是集 X 上的一个**伪度量**，如果它满足下列条件：$\forall x, y, z \in X$，

(1) $\rho(x,y) \geqslant 0$；

(2) 若 $x = y$，则 $\rho(x,y) = 0$；

(3) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$；

(4) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

（Ⅱ）　ρ 是 X 上的一个度量，如果 ρ 是 X 上的伪度量且满足

下列条件：$\forall x,y\in X$，

(2*)若 $\rho(x,y)=0$，则 $x=y$.

(Ⅱ) 设 ρ 是集 X 上的(伪)度量．$x\in X, r>0$，集

$$B_\rho(x,r)=\{y\in X: \rho(x,y)<r\}$$

表开球．X 上以 $\{B_\rho(x,r): x\in X, r>0\}$ 为基生成的拓扑 T_ρ 叫(伪)**度量拓扑**．空间 (X,T_ρ) 叫(伪)**度量空间**，简记为 (X,ρ).

2.1.8 引理 伪度量空间是完满正规的．

证 设 ξ 是伪度量空间 (X,ρ) 的开覆盖．$\forall n<\omega$，令 $\eta_n=\{B_\rho(x,\frac{1}{n+1}): x\in X\}$．设 $x\in X$，则 $\exists U\in\xi, x\in U$．设 $r>0$，使得 $B_\rho(x,r)\subset U$．取 $n<\omega$，使得 $n+1>3/r$，则

$$\mathrm{St}(B_\rho(x,\frac{1}{n+1}),\eta_n)\subset U.$$

于是 (η_n) 是 ξ 的开的局部星形加细序列．据 2.1.6，(X,ρ) 是完满正规的．证毕．

2.1.9 定义 设 $\eta=\{A_s: s\in S\}$ 是空间 X 的子集族．

(Ⅰ) η 在点 $x\in X$ 是**局部有限(离散)**的，如果 x 有邻域 G，使得 $\{s\in S: G\cap A_s\neq\varnothing\}$ 是有限的(至多含一个元).

(Ⅱ) η 在空间 X 内是**局部有限的(离散的)**，如果 η 在每一点 $x\in X$ 是局部有限(离散)的．

(Ⅲ) η 是 **σ-局部有限(σ-离散)**的，如果 η 是可数多个局部有限(离散)族的并．

2.1.10 引理 (Ⅰ)设 ξ 是 X 的开覆盖且 $\{A_s: s\in S\}$ 是 X 的子集族，则

$$\overline{\bigcup\{\mathrm{St}(A_s,\xi): s\in S\}}\subset\bigcup\{\mathrm{St}^2(A_s,\xi): s\in S\}.$$

(Ⅱ)设 X 的覆盖 η 是覆盖 ξ 的星形加细，则

$$\forall A\subset X(\mathrm{St}^2(A,\eta)\subset\mathrm{St}(A,\xi)).$$

2.1.11　定理　设 ξ 是空间 X 的正规覆盖，则 ξ 有一个局部有限且 σ-离散的开加细.

证　设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$，基数 $\kappa\geqslant\omega$. 设 (η_n) 是 X 的开覆盖列，使得 $\eta_0=\xi$ 且 η_{n+1} 是 η_n 的星形加细，$n<\omega$. $\forall n\in N$，$x\in X$，令

$$\delta(x,n)=\min\{\alpha<\kappa:\mathrm{St}(x,\eta_n)\subset U_\alpha\},$$

$$\delta(x)=\min\{\delta(x,n):n\in N\}.$$

$\forall\alpha<\kappa$，$n\in N$，令

$$F(\alpha,n)=\{x\in X:\delta(x)=\alpha\text{ 且 }\mathrm{St}(x,\eta_n)\subset U_\alpha\}.$$

易知 $\{F(\alpha,n):\alpha<\kappa,n\in N\}$ 是 X 的覆盖且对每个固定的 $n\in N$，

$$\eta_{n+1}\text{的每个元至多与一个 }F(\alpha,n)\text{相交.}\tag{1}$$

$\forall\alpha<\kappa$，$n\in N$，令

$G(\alpha,n)=\mathrm{St}(F(\alpha,n),\eta_{n+1})$，则

$$\varphi_n=\{G(\alpha,n):\alpha<\kappa\}\text{是离散开集族.}\tag{2}$$

事实上，设 $x\in X$. 设 $W\in\eta_{n+1}$，使得 $x\in W$，$V\in\eta_{n+1}$ 且 $\mathrm{St}(W,\eta_{n+2})\subset V$. 若 $W\cap G(\alpha,n)\neq\varnothing$，则 $F(\alpha,n)\cap V\neq\varnothing$. 于是由(1)知，$W\in N(x)$ 至多与 φ_n 的一个元相交，(2)真.

显然 $\varphi=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n$ 是 ξ 的开加细. $\forall n\in N$，令

$$B_n=\bigcup\{\mathrm{St}(F(\alpha,n),\eta_{n+4}):\alpha<\kappa\}.$$

$$H(\alpha,n)=G(\alpha,n)\setminus\bigcup\{\bar{B}_k:k<n\},\ \alpha<\kappa.$$

$$\zeta_n=\{H(\alpha,n):\alpha<\kappa\}.$$

由 2.1.10 知，$\forall n\in N$，$\bar{B}_n\subset\bigcup\varphi_n$. 由此易知 $\zeta=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\zeta_n$ 覆盖 X，从而它是 ξ 的 σ-离散开加细. 只需再证 ζ 是局部有限的. 设 $x\in X$. 因 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\supset\bigcup\{F(\alpha,n):\alpha<\kappa,n\in N\}=X$. $\exists$ 最小的 $k\in N$，使得 $x\in B_k$. $\forall n>k$，$\forall\alpha<\kappa$，$B_k\cap H(\alpha,n)=\varnothing$. $\forall i\leqslant k$，$\exists W_i\in N(x)$ 至多与 ζ_i 的一个元相交. 则 $W=B_k\cap W_1\cap\cdots\cap W_k\in N(x)$ 且 W 至多与 ζ 的有限多个

元相交，因此，ζ 是局部有限的．证毕．

2.1.12 系 伪度量空间的每个开覆盖有一个局部有限且 σ-离散的开加细．

2.1.13 引理 （A. H. Frink[1937]） 设 d 是 $X\times X$ 上的非负实值函数且满足下列条件：

$\forall\ r>0$，若 $d(x,y)<r$ 且 $d(y,z)<r$，有

$$d(x,z)<2r, \tag{1}$$

则 $X\times X$ 上有一个非负实值函数 ρ 满足下列条件：

$\forall\ x,y,z\in X$，

（Ⅰ） $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$；

（Ⅱ） 若 $d(x,y)=d(y,x)$，则 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

（Ⅲ） $d(x,y)/4\leqslant\rho(x,y)\leqslant d(x,y)$．

证 对 $x,y,z\in X$，定义：

$$\eta(x,y)=\{\langle a_0,a_1,\cdots,a_{n+1}\rangle : n<\omega,\forall\ a_i\in X,a_0=x,a_{n+1}=y\},$$

$$\rho(x,y)=\inf\{\sum_{i=0}^{n}d(a_i,a_{i+1}) : \langle a_0,\cdots,a_{n+1}\rangle\in\eta(x,y)\}.$$

则 ρ 是 $X\times X$ 上的非负实值函数且显然满足（Ⅰ）、（Ⅱ）及（Ⅲ）中右端的不等式．为了证明（Ⅲ）中左端的不等式，只需证：$\forall\ n<\omega$ $\forall\ \langle a_0,\cdots,a_{n+1}\rangle\in\eta(x,y)$，

$$d(x,y)\leqslant 2d(x,a_1)+4\sum_{i=1}^{n-1}d(a_i,a_{i+1})+2d(a_n,y) \tag{2n}$$

我们对 $n<\omega$ 用归纳法．当 $n=0$ 时，$(2n)$ 显然真．假设 $n\geqslant 1$ 且设 $\forall\ k<n$，$(2k)$ 真．下面来证 $(2n)$ 真．设 $\langle a_0,\cdots,a_{n+1}\rangle\in\eta(x,y)$．由条件(1)知，$\forall\ i=1,2,\cdots,n$，

$$d(x,y)\leqslant 2d(x,a_i)\text{或 } d(x,y)\leqslant 2d(a_i,y) \tag{3}$$

令 $k=\min\{i : i=1,\cdots,n,d(x,y)\leqslant 2d(x,a_i)\}$．若 $k=1$，则 $d(x,y)\leqslant 2d(x_1,a_1)$，$(2n)$ 真．若 $k>1$，则 $d(x,y)\leqslant 2d(x,a_{k-1})$ 又由(3)知，

$d(x,y)\leqslant 2d(a_{k-1},y)$. 于是有

$$d(x,y)\leqslant d(x,a_k)+d(a_{k-1},y).$$

对 $d(x,a_k)$ 与 $d(a_{k-1},y)$ 应用归纳法假设，得到

$$d(x,y)\leqslant 2d(x,a_1)+4\sum_{i=1}^{n-1}d(a_i,a_{i+1})+2d(a_n,y).$$

$(2n)$ 真，归纳法完成．证毕．

2.1.14 定义 空间 X 的覆盖 η 是覆盖 ξ 的**正则加细**或 η 正则加细 ξ，如果

$$\forall V,W\in\eta\,(V\cap W\neq\varnothing\rightarrow\exists U\in\xi(V\cup W\subset U)).$$

显然星形加细是正则加细，正则加细是加细．

2.1.15 引理 设拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 有开覆盖列 $\langle\xi_n\rangle$，使得 $\forall n<\omega$，ξ_{n+1} 正则加细 ξ_n．则 X 上有一个伪度量 ρ，使得 $T_\rho\subset\tau$ 且 $\forall n<\omega$，$x\in X$，有

$$B_\rho\left(x,\frac{1}{2^{n+2}}\right)\subset\mathrm{St}(x,\xi_n)\subset B_\rho(x,1/2^n),\tag{1}$$

证 $\forall x,y\in X$，令

$$D(x,y)=\{n<\omega:y\notin\mathrm{St}(x,\xi_n)\},$$

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } D(x,y)=\varnothing,\\ \dfrac{1}{2^n}, & \text{当 } D(x,y)\neq\varnothing \text{ 且 } n=\min D(x,y).\end{cases}$$

则 d 是 $X\times X$ 上的非负实值函数，使得 $d(x,y)=d(y,x)$．易知

$$\mathrm{St}(x,\xi_n)=\{y\in X:d(x,y)<\frac{1}{2^n}\}.\tag{2}$$

下证：$\forall\varepsilon>0$，

$$d(x,y)<\varepsilon \text{ 且 } d(y,z)<\varepsilon\rightarrow d(x,z)<2\varepsilon.\tag{3}$$

事实上，不妨设 $d(x,y)>0$．因 $d(x,y)\leqslant 1$，可设 $\varepsilon\leqslant 1/2$．令

$$k=\min\{n<\omega:\frac{1}{2^k}<\varepsilon\}.$$

则 $k\geqslant 2$ 且 $d(x,y)<1/2^{k-1}$，$d(y,z)<1/2^{k-1}$，由(2)知

$y\in \mathrm{St}(x,\xi_{k-1})$，$z\in \mathrm{St}(y,\xi_{k-1})$，于是有

$$d(x,z)\leqslant 2/2^k<2\varepsilon,$$

(3)真.

由(3)及 2.1.13 知，X 上有一个伪度量 ρ，使得

$$d(x,y)/4\leqslant\rho(x,y)\leqslant d(x,y).$$

由此式及(2)立即得(1)式. 由(1)知，$T_\rho\subset\tau$. 证毕.

2.1.16 定义 拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 是**可(伪)度量的**，如果 X 上有一个(伪)度量 ρ 使得(伪)度量拓扑 T_ρ 与 τ 相同.

2.1.17 定义 设 $\langle\xi_n\rangle$ 是空间 X 的开覆盖列.

(Ⅰ) $\langle\xi_n\rangle$ 是 X 的一个**展开**，如果 $\forall\ x\in X$，$\{\mathrm{St}(x,\xi_n):n<\omega\}$ 是 x 的邻域基.

(Ⅱ) $\langle\xi_n\rangle$ 是 X 的一个**强展开**，如果 $\forall\ x\in X$，族 $\{\mathrm{St}(V,\xi_n):V\in N(x),n<\omega\}$ 是 x 的邻域基.

(Ⅲ) 空间 X 是(**强**)**可展的**，如果 X 有一个(强)展开.

显然，强可展空间是可展的. T_1 正则的可展空间叫 Moore 空间.

2.1.18 引理 (Ⅰ) T_0 的可展空间是 T_1 的.

(Ⅱ) 强可展空间是完满正规的.

证 (Ⅰ) 显然.

(Ⅱ) 设 $\langle\xi_n\rangle$ 是 X 的强展开. 则它是 X 的任何开覆盖的局部星形加细序列.

设 ξ,η 是 X 的覆盖，记

$$\xi\wedge\eta=\{U\cap V:U\in\xi,V\in\eta\}.$$

则 $\xi\wedge\eta$ 是 ξ 和 η 的加细.

2.1.19　定理　对任意空间 (X,τ)，下列各条等价：

（Ⅰ）　X 是可伪度量的；

（Ⅱ）　(R. L. Moore[1935]) X 是强可展的；

（Ⅲ）　X 是完满正规和可展的；

（Ⅳ）　X 有一个展开 $\langle\zeta_n\rangle$ 使得 $\forall\ n<\omega$，ζ_{n+1} 星形加细 ζ_n；

（Ⅴ）　(Alexandroff-Urysohn[1923]) X 有一个展开 $\langle\zeta_n\rangle$，使得 $\forall\ n<\omega$，ζ_{n+1} 正则加细 ζ_n.

证　（Ⅰ）→（Ⅱ）　设 ρ 是 X 上的伪度量使得伪度量拓扑 $T_\rho=\tau$. 定义 $\zeta_n=\{B_\rho(x,1/2^n):x\in X\}$，$n<\omega$. 则 $\langle\zeta_n\rangle$ 是 X 的强展开.

（Ⅱ）→（Ⅲ）由 2.1.18 知.

（Ⅲ）→（Ⅳ）设 $\langle\eta_n\rangle$ 是完满正规空间 X 的任一展开. 令 $\zeta_0=\eta_0$，设 ζ_1 是 $\zeta_0\wedge\eta_1$ 的星形开加细. 设已得到 X 的开覆盖 $\zeta_0,\cdots,\zeta_n$ 使得 $\forall\ i\leqslant n-1$，ζ_{i+1} 是 ζ_i 的星形加细，且 ζ_i 加细 η_i，$i\leqslant n$. 因 X 是完满正规的，$\zeta_n\wedge\eta_{n+1}$ 有星形开加细 ζ_{n+1}. 由归纳法知，X 有开覆盖列 $\langle\zeta_n\rangle$，使得 $\forall\ n<\omega$，ζ_{n+1} 是 ζ_n 的星形加细且 ζ_n 加细 η_n，从而 $\langle\zeta_n\rangle$ 是 X 的展开.

（Ⅳ）→（Ⅴ）显然.

（Ⅴ）→（Ⅰ）　设 X 有一个展开 $\langle\zeta_n\rangle$，使得 $\forall\ n<\omega$，ζ_{n+1} 是 ζ_n 的正则加细. 据 2.1.15，X 上有一个伪度量 ρ 使得 $T_\rho\subset\tau$ 且 $B_\rho(x,1/2^{n+2})\subset\mathrm{St}(x,\zeta_n)$. 设 $G\in\tau$ 且 $x\in G$，则 $\exists\ n<\omega$，$\mathrm{St}(x,\zeta_n)\subset G$，从而 $B_\rho(x,1/2^{n+2})\subset G$. 故 $G\in T_\rho$. $T_\rho=\tau$，X 是可伪度量的. 证毕.

2.1.20　系　对任意空间 X，下列各条等价：

（Ⅰ）　X 是可度量的；

（Ⅱ）　X 是 T_0 强可展的；

（Ⅲ）　X 是 T_0 完满正规和可展的；

（Ⅳ） X 是 T_0 的且有一个展开 $\langle\xi_n\rangle$，使得 $\forall\ n<\omega$，ξ_{n+1} 星形加细 ξ_n；

（Ⅴ） X 是 T_0 的且有一个展开 $\langle\xi_n\rangle$，使得 $\forall\ n<\omega$，ξ_{n+1} 是 ξ_n 的正则加细.

2.1.21 定理 空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的开覆盖 ξ 是正规的当且仅当存在度量空间 $\langle Y,d\rangle$，存在满映射 $f: X\to Y$ 及 Y 的开覆盖 η，使得 $\{f^{-1}[V]: V\in\eta\}$ 加细 ξ.

证 （$\to$）设 $\langle\xi_n\rangle$ 是 X 的开覆盖列，使得 $\xi_0=\xi$ 且 ξ_{n+1} 是 ξ_n 的星形加细，$n<\omega$. 据 2.1.15，X 上有一个伪度量 ρ，使得 $T_\rho=\tau$ 且 $B_\rho(x,1/8)\subset \mathrm{St}(x,\xi_1)$，则 $\gamma=\{B_\rho(x,1/8: x\in X)\}$ 加细 ξ. 令

$$E=\{\langle x,y\rangle\in X\times X: \rho(x,y)=0\}.$$

$$Y=X/E.$$

定义：

$$d(E[x],E[y])=\rho(x,y),x,y\in X.$$

易知 d 是 Y 上的度量且 $T_d=T_\rho/E$，即伪度量拓扑关于 E 的商拓扑. 设 $f: X\to Y$ 是自然映射，即 $f(x)=E[x]$. 则 $f:\langle X,\tau\rangle\to\langle Y,d\rangle$ 是连续满函数. 令 $\eta=\{B_d(E[x],1/8): x\in X\}$，则 η 是 Y 的开覆盖且由 $B_\rho(x,r)=f^{-1}[B_d(E[x],r)]$ 知 $\{f^{-1}[V]: V\in\eta\}=\gamma$，从而它加细 ξ.

（$\leftarrow$）设 ξ 是 X 的开覆盖且存在合定理条件的 $\langle Y,d\rangle$，$f: X\to Y$ 和 η. 因 $\langle Y,d\rangle$ 是完满正规的，从而 η 是正规的. 于是 $\{f^{-1}[V]: V\in\eta\}$ 是正规的，从而 ξ 是正规的. 证毕.

今后用 I 表数直线的单位区间 $[0,1]$.

2.1.22 定义 设 $\forall\ s\in S$，$f_s: X\to I$ 连续.

（Ⅰ） $\varphi=\{f_s: s\in S\}$ 是空间 X 上的一个**单位分解**，如果 $\forall\ x\in X$，$\sum\{f_s(x): s\in S\}=1$.

（Ⅱ）称单位分解 $\varphi=\{f_s: s\in S\}$ 是**局部有限的**，如果族

$\{g_s^{-1}[(0,1]]: s\in S\}$是局部有限的. 称$\varphi$从属于$X$的覆盖$\xi$,如果$\{f_s^{-1}[(0,1]]: s\in S\}$加细$\xi$.

2.1.23　定义　(Ⅰ)　G是空间X的**函数开集或余零集**,如果存在映射$f: X\to I$使得$G=f^{-1}[(0,1]]$.

(Ⅱ)　F是X的**函数闭集或零集**,如果存在映射$f: X\to I$,使得$F=f^{-1}[0]$.

显然,A是X的函数开集当且仅当$X\backslash A$是函数闭集.

2.1.24　引理　(Ⅰ)　两个函数开集的交是函数开集.

(Ⅱ)　可数多个函数开集的并是函数开集.

(Ⅲ)　若A是空间X的开且闭集,则A是函数开和函数闭集.

(Ⅳ)　设$f: X\to Y$连续且V是Y的函数开集,则$f^{-1}[V]$是X的函数开集.

证　(Ⅰ)　设G,H是空间X的函数开集. 设$f,g: X\to I$连续,使得$G=f^{-1}[(0,1]]$,$H=g^{-1}[(0,1]]$. 令

$$h(x)=f(x)\cdot g(x),x\in X.$$

则$h: X\to I$连续且$G\cap H=h^{-1}[(0,1]]$,$G\cap H$是函数开集.

(Ⅱ)设$\forall\ n<\omega$,G_n是X的函数开集. 则存在映射$f_n: X\to I$,使得$G_n=f_n^{-1}[(0,1]]$. 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)/2^{n+1},x\in X.$$

则$f: X\to I$连续且$\bigcup_{n<\omega}G_n=f^{-1}[(0,1]]$,从而它是函数开集.

(Ⅲ)和(Ⅳ)是显然的. 证毕.

2.1.25　引理　设ξ是空间X的开覆盖.

(Ⅰ)　若ξ有局部有限的函数开加细,则X上有局部有限的单位分解从属于ξ.

(Ⅱ) 若 ξ 有 σ-局部有限的函数开加细,则 X 上有单位分解从属于 ξ.

证 (Ⅰ)设 $\eta=\{V_s: s\in S\}$是 ξ 的局部有限函数开加细. $\forall s\in S$,设 $f_s: X\to I$ 连续,使得 $V_s=f_s^{-1}[(0,1]]$. 令

$$f(x)=\sum\{f_s(x): s\in S\}, x\in X.$$

$$g_s(x)=f_s(x)/f(x), x\in X.$$

因$\{V_s: s\in S\}$是局部有限的,$f: X\to R$ 连续. 因 η 覆盖 X,$\forall x\in X$,$f(x)>0$,于是 $g_s: X\to I$ 连续.

$$\forall x\in X, \sum\{g_s(x): s\in S\}=1 \text{ 且 } g_s^{-1}[(0,1]]=V_s,$$

则$\{g_s: s\in S\}$是 X 上从属于 ξ 的局部有限单位分解.

(Ⅱ)设 $\eta=\bigcup_{n<\omega}\eta_n$ 是 ξ 的函数开加细,每个 $\eta_n=\{V_{ns}: s\in S_n\}$是局部有限的,设 $f_{ns}: X\to I$ 连续,使得 $V_{ns}=f_{ns}^{-1}[(0,1]]$. $\forall n<\omega$,令

$$f_n(x)=\sum\{f_{ns}(x): s\in S_n\}, x\in X,$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)/2^{n+1}(1+f_n(x)), x\in X.$$

$\forall n<\omega$,因 η_n 是局部有限的,$f_n: X\to R$ 连续,从而 $g: X\to I$ 连续,且$\forall x\in X, g(x)>0$. $\forall n<\omega, s\in S_n$,令

$$g_{ns}(x)=f_{ns}(x)/2^{n+1}(1+f_n(x))\cdot g(x), x\in X.$$

则 $g_{ns}: X\to I$ 连续,$g_{ns}^{-1}[(0,1]]=f_{ns}^{-1}[(0,1]]=V_{ns}$. $\forall x\in X$,$\sum\{g_{ns}(x): n<\omega, s\in S_n\}=1$,$\{g_{ns}: n<\omega, s\in S_n\}$就是从属于 ξ 的单位分解. 证毕.

2.1.26 定义 (Ⅰ) 空间 X 的子集 A 是 X 内的 G_δ **集**(F_σ **集**),如果 A 是 X 的可数多个开(闭)集的交(并).

(Ⅱ) 空间 X 是**完全的**,如果它的每个开集是 F_σ 集. 等价地,闭集是 G_δ 集.

（Ⅲ）　空间 X 是**正规的**，如果对 X 内任意不相交的闭集 A 与 B，$\exists\ U\in N(A), V\in N(B), U\cap V=\varnothing$.

（Ⅳ）　空间 X 是**完全正规的**，如果它是完全的和正规的.

在下一节中可知完满正规空间是正规的.

2.1.27　引理　伪度量空间是完全正规的.

证　设 F 是伪度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 的闭集. 令

$$G_n=\bigcup\{B_\rho(x,1/(n+1)):x\in F\}, n<\omega.$$

则 G_n 是开集且 $F=\bigcap\limits_{n<\omega}G_n$，$F$ 是 G_δ 集，X 是完全的. 其次，设 A,B 是 X 内不相交的闭集，则

$$\forall x\in X, \rho(x,A)+\rho(x,B)>0.$$

令

$$f(x)=\frac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}, x\in X.$$

则 $f:X\to I$ 连续且 $f[A]\subset\{0\}, f[B]\subset\{1\}$. 据 Urysohn 引理，$\langle X,\rho\rangle$ 是正规的. 证毕.

2.1.28　引理　设 X 是正规空间，则

（Ⅰ）　G 是 X 的开 F_σ 集 $\leftrightarrow G$ 是 X 的函数开集.

（Ⅱ）　F 是 X 的闭 G_δ 集 $\leftrightarrow F$ 是 X 的函数闭集.

证　（Ⅰ）（$\to$）设 $G=\bigcup\limits_{n<\omega}F_n$ 是开集，每个 F_n 是闭集. $\forall n<\omega$，$F_n\subset G$. 则 $\exists\ f_n:X\to I$ 连续，使得 $f_n[X\setminus G]\subset\{0\}, f_n[F_n]\subset\{1\}$.

令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)/2^{n+1},\ x\in X.$$

则 $f:X\to I$ 连续且 $G=f^{-1}[(0,1]]$.

（$\leftarrow$）设 $\exists\ f:X\to I$ 连续，使得 $G=f^{-1}[(0,1]]$. 则 G 是开集，因 $(0,1]=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{n+1},1]$，则 $G=\bigcup\limits_{n<\omega}f^{-1}[[\frac{1}{n+1},1]]$ 是 F_σ 集.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,证毕.

下面重要定理的证明,属于 Tukey[1940],A. H. Stone[1948], Michael[1953]及 Morita[1964]的工作.

2.1.29 定理 设ξ是空间X的开覆盖,则下列各条等价:

(Ⅰ) ξ是X的正规覆盖;

(Ⅱ) ξ有局部有限且σ-离散的函数开加细;

(Ⅲ) ξ有局部有限的函数开加细;

(Ⅳ) ξ有σ-离散的函数开加细;

(Ⅴ) ξ有σ-局部有限的函数开加细;

(Ⅵ) X上有局部有限的单位分解从属于ξ;

(Ⅶ) X上有单位分解从属于ξ.

证 (Ⅰ)→(Ⅱ)设ξ是X的正规覆盖. 据2.1.21,存在度量空间Y,存在满映射$f:X\to Y$及Y的开覆盖η,使得$\{f^{-1}[V]:V\in\eta\}$加细ξ. η是正规覆盖,它有局部有限且σ-离散的开加细γ. Y是完全正规的,γ的每个元是开F_σ集,从而是函数开集. 于是$\{f^{-1}[W]:W\in\gamma\}$是ξ的局部有限且σ-离散的函数开加细.

(Ⅱ)→(Ⅲ),(Ⅱ)→(Ⅳ),(Ⅳ)→(Ⅴ)及(Ⅵ)→(Ⅶ)是显然的.

(Ⅴ)→(Ⅶ)及(Ⅲ)→(Ⅵ)由2.1.25知.

剩下只需证:

(Ⅶ)→(Ⅰ)设$\varphi=\{f_s:s\in S\}$是X上从属于ξ的单位分解. 令

$$U=\{u\in{}^{S}I:\sum\{u(s):s\in S\}=1\},$$

$$d(u,v)=\sum\{|u(s)-v(s)|:s\in S\},u,v\in U.$$

则d是U上的一个度量. 定义$g:X\to U$如下:

$$(g(x))(s)=f_s(x),x\in X.$$

则
$$g:X\to U \text{ 连续}. \tag{1}$$

事实上，设 $x\in X$.

$$\sum\{(g(x))(s):s\in S\}=\sum\{f_s(x):s\in S\}=1,$$

故 $g(x)\in U$. 其次，$\exists\ \{s_n:n<\omega\}\subset S$，使得 $\forall s\notin\{s_n:n<\omega\}$，

$$f_s(x)=0 \text{ 且 } \sum_{n=0}^{\infty}f_{s_n}(x)=1.$$

$\forall \varepsilon>0$. 不妨设 $\varepsilon\leqslant 1$. $\exists\ m<\omega$, $\sum\limits_{n=0}^{m}f_{s_n}(x)>1-\varepsilon/4$. 令 $T=\{s_0,s_1,\cdots,s_m\}$，则 $\sum\{f_s(x):s\notin T\}<\varepsilon/4$. $\forall n\leqslant m$, f_{s_n} 在 x 连续，则 $\exists\ G_n\in N(x)$, $\forall y\in G_n$,

$$|f_{s_n}(x)-f_{s_n}(y)|<\varepsilon/4(m+1).$$

则 $G=\bigcap\limits_{n=0}^{m}G_n\in N(x)$. $\forall y\in G$,

$$\sum_{s\notin T}f_s(y)\leqslant\sum_{n=0}^{m}|f_{s_n}(x)-f_{s_n}(y)|+\sum_{s\notin T}f_s(x)<\varepsilon/4+\varepsilon/4=\varepsilon/2.$$

$$d(g(x),g(y))\leqslant\sum_{n=0}^{m}|f_{s_n}(x)-f_{s_n}(y)|+\sum_{s\notin T}f_s(x)+\sum_{s\notin T}f_s(y)<$$
ε. 这就证明了(1)式.

$\forall s\in S$，令 $W_s=\{u\in U:u(s)>0\}$. 则 $\{W_s:s\in S\}$ 是 U 的开覆盖. 令 $Y=g[X]$. 则 $f=\dot{g}:X\to Y$ 是满映射. 令 $V_s=W_s\cap Y$, $s\in S$. 则 $\{V_s:s\in S\}$ 是 Y 的开覆盖，$\forall s\in S$, $f^{-1}[V_s]=f_s^{-1}[(0,1]]$. 因 φ 从属于 ξ，族 $\{f^{-1}[V_s]:s\in S\}$ 是 ξ 的加细，据2.1.21，ξ 是正规覆盖. 证毕.

§2.2　仿紧空间的基本刻画与性质

本节介绍正则或 T_2 空间范围内仿紧空间的基本刻画和性质.

主要是四五十年代的优秀工作. 它们对仿紧空间不仅具有重要的理论意义，同时对度量化定理、广义仿紧空间等理论的发展也产生过深远的影响. 本节最后介绍完满正规空间的新的刻画定理.

2.2.1　定义　(Dieudonne′[1944])　空间 X 是**仿紧的**，如果它的每个开覆盖有局部有限开加细.

显然，紧空间是仿紧的. R 上赋予离散拓扑是仿紧而非紧的. 由2.1.11知，完满正规空间是仿紧的，从而伪度量空间是仿紧的.

2.2.2　引理　T_2仿紧空间是正则的.

证　设 X 是T_2仿紧空间. F 闭于 X 且 $x\in X\setminus F$. $\forall t\in F$，存在$G_t\in N(t)$，$H\in N(x)$，使得$G_t\cap H=\varnothing$. 则 $x\notin\overline{G_t}$. $\xi=\{G_t:t\in F\}\cup\{X\setminus F\}$是 X 的开覆盖，从而它有局部有限开加细 η. 令

$$U=\bigcup\{W\in\eta:W\cap F\neq\varnothing\},\quad V=X\setminus\overline{U}.$$

则 $U\in N(F)$，$V\in N(x)$，$U\cap V=\varnothing$. X 是正则的. 证毕.

T_2仿紧空间实际上具有更强的分离性，后面即将看到它还是正规的，甚至是完满正规的.

2.2.3　引理　设 ξ 是空间 X 的 σ-局部有限开覆盖，则 ξ 有局部有限加细.

证　设 $\xi=\bigcup_{n<\omega}\xi_n$，每个$\xi_n$ 是局部有限开集族. 令$\eta_0=\xi_0$. $\forall n\geqslant 1$，$U\in\xi_n$，令

$$G(n,U)=U\setminus\bigcup\{\bigcup\xi_i:i<n\},$$

$$\eta_n=\{G(n,U):U\in\xi_n\}.$$

现证 $\eta=\bigcup_{n<\omega}\eta_n$ 是 ξ 的局部有限加细. 事实上，设 $x\in X$. 令 $n(x)=\min\{n<\omega:(\xi_n)_x\neq\varnothing\}$. 设$U_x\in\xi_{n(x)}$，使得 $x\in U_x$. 则 $x\in G(n(x),U_x)$，$\bigcup\eta=X$. 于是 η 是 ξ 的加细. 其次，$\forall i>n(x)$ $\forall U\in\xi_i$，

$$U_x\cap G(i,U)\subset(\bigcup\xi_{n(x)})\cap(X\setminus\bigcup\xi_{n(x)})=\varnothing.$$

$\forall i\leqslant n(x)\exists V_i\in N(x)$至多与$\xi_i$ 的有限多个元相交，从而至多与η_i 的

有限多个元相交. 于是 x 的邻域 $U_x\cap\bigcap_{i=0}^{n(x)}V_i$ 至多与 η 的有限多个元相交. 证毕.

2.2.4　定理(Michael[1953])　设 X 是正则空间，则下列各条等价：

(Ⅰ)　X 是仿紧的；

(Ⅱ)　X 的每个开覆盖有 σ-局部有限开加细；

(Ⅲ)　X 的每个开覆盖有局部有限加细；

(Ⅳ)　X 的每个开覆盖有局部有限闭加细.

证　(Ⅰ)→(Ⅱ)显然. (Ⅱ)→(Ⅲ)由2.2.3知.

(Ⅲ)→(Ⅳ)　设 ξ 是 X 的开覆盖. 因 X 是正则的，X 有开覆盖 η，使得 $\{\overline{V}:V\in\eta\}$ 加细 ξ. 由假设(Ⅲ)，η 有局部有限加细 ζ. 则 $\{\overline{W}:W\in\zeta\}$ 是 ξ 的局部有限闭加细.

(Ⅳ)→(Ⅰ)　设 ξ 是 X 的开覆盖. 由假设(Ⅳ)，ξ 有局部有限闭加细 φ. $\forall x\in X\ \exists V(x)\in N(x)$ 至多与 φ 的有限多个元相交. $\eta=\{V(x):x\in X\}$ 是 X 的开覆盖，它有局部有限闭加细 β. 令

$$W(D)=X\setminus\bigcup\{B\in\beta:B\cap D=\varnothing\},D\in\varphi.$$

则 $W(D)$ 是包含 D 的开集，使得 $\forall B\in\beta,D\in\varphi$，

$B\cap W(D)=\varphi\leftrightarrow B\cap D=\varnothing$. $\forall D\in\varphi$，取 $U(D)\in\xi$，使得 $D\subset U(D)$.

令

$$\zeta=\{W(D)\cap U(D):D\in\varphi\}.$$

现证 ζ 是 ξ 的局部有限开加细，X 是仿紧的. 事实上，由 $D\subset W(D)\cap U(D)$ 知 ζ 覆盖 X 从而是 ξ 的开加细. 设 $x\in X$，则 $\exists G\in N(x)$，$(\beta)_G=\{B_0,\cdots,B_n\}$ 有限. $\forall i\leqslant n$，设 $B_i\subset V(x_i)$. 令

$$\varphi_x=\{D\in\varphi:G\cap W(D)\cap U(D)\neq\varnothing\}.$$

为证 ζ 在 x 局部有限，只需证 φ_x 有限. 因每个 $(\varphi)_{V(x_i)}$ 有限且 $\varphi_x\subset\bigcup_{i=0}^{n}$

$(\varphi)_{V(x_i)}$，φ_x 有限．证毕．

空间 X 称为 Lindelöf 的，如果它的每个开覆盖有可数子覆盖．

2.2.5　系　正则 Lindelöf 空间是仿紧的．

2.2.6　例　T_2　Lindelöf 空间不必是仿紧的．

证　令 $A=\{\frac{1}{n+1}:n<\omega\}$．$\forall x\in R,n<\omega,U_n(x)=(x-\frac{1}{n+1},x+\frac{1}{n+1})$表 R 内的开区间．令

$$\eta_x=\begin{cases}\{U_n(0)\setminus A:n<\omega\}, & \text{当 } x=0,\\ \{U_n(x):n<\omega\}, & \text{当 } x\in R\setminus\{0\}.\end{cases}$$

在 R 上赋予以η_x 为 x 的邻域基生成的拓扑 τ，我们来证明：

（Ⅰ）$\langle R,\tau\rangle$是T_2　Lindelöf 的．

证　设 ξ 是 R 的开覆盖．$\forall x\in R\exists U_x\in\xi,x\in U_x$．又$\exists B_x\in\eta_x$，$x\in B_x\subset U_x$．$R\setminus\{0\}$作为数直线的子空间是 Lindelöf 的且

$$R\setminus\{0\}\subset\bigcup\{B_x:x\in R\setminus\{0\}\}.$$

则有可数子集 $C\subset R\setminus\{0\}$，$R\setminus\{0\}\subset\bigcup\{B_x:x\in C\}$．则$\{U_0\}\cup\{U_x:x\in C\}$即为 ξ 的可数子覆盖．$\langle R,\tau\rangle$是 Lindelöf 的，它显然是T_2的．

（Ⅱ）$\langle R,\tau\rangle$不正则，从而由2.2.2知它不仿紧．

证　$A=\{\frac{1}{n+1}:n<\omega\}$是不含零的闭集．只需证对任意的 $U\in N(A)$，$V\in N(0)$，$U\cap V\neq\varnothing$．事实上，$\exists n<\omega,U_n(0)\setminus A\subset V$．另方面，$\frac{1}{n+2}\in A\subset U$．$\exists m<\omega,U_m(\frac{1}{n+2})\subset U$．取 $k<\omega$ 使得$\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$．令 $h=\max\{m,k\}$．取 $p\in R$ 使得

$$\frac{1}{n+2}<p<\frac{1}{n+2}+\frac{1}{h+1}\leqslant\frac{1}{n+2}+\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

则 $p\in U_h(\frac{1}{n+2})\cap(U_n(0)\setminus A)\subset U\cap V$．证毕．

2.2.7　引理　可数紧的仿紧空间是紧的．

证　设 X 是可数紧的仿紧空间且 ξ 是 X 的开覆盖. 设 η 是 ξ 的局部有限开加细. 据蒲保明等[1985]4.3.4, η 是有限的. X 是紧的. 证毕.

2.2.8　例　仿紧性不是遗传性质.

证　据蒲保明等[1985]4.2.5, 序数空间 $\omega_1\oplus 1$ 是紧的从而仿紧. 又由该书例4.3.5知它的子空间 ω_1 是可数紧且非紧的. 由2.2.7知 ω_1 不仿紧. 证毕.

2.2.9　引理　(Ⅰ)仿紧空间的闭子空间是仿紧的.

(Ⅱ)正则仿紧空间的 F_σ 子空间是仿紧的.

证　(Ⅰ)设 F 是仿紧空间 X 的闭子集且 ξ 是 F 的开覆盖. $\forall U\in\xi$, $\exists G(U)$ 开于 X, 使得 $U=G(U)\cap F$. $\{G(U):U\in\xi\}\cup\{X\setminus F\}$ 是 X 的开覆盖, 从而有一个局部有限开加细 ζ. 令

$$\eta=\{W\cap F:W\in\zeta, W\cap F\neq\varnothing\}.$$

则 η 是 ξ 的局部有限开加细, F 是仿紧的.

(Ⅱ)见蒲保明等[1985]的7.1.10. 证毕.

2.2.10　引理　设空间 X 的开覆盖 ξ 有局部有限闭加细 φ, 则 ξ 有点星形开加细.

证　$\forall F\in\varphi\exists U(F)\in\xi, F\subset U(F)$. $\forall x\in X$, 令

$$V(x)=\bigcap\{U(F):F\in(\varphi)_x\}\cap\{X\setminus\bigcup(\varphi\setminus(\varphi)_x)\},$$

则 $V(x)\in N(x)$. 现证 X 的开覆盖 $\eta=\{V(x):x\in X\}$ 是 ξ 的点星形加细. 设 $x\in X$. 任取 $F_0\in(\varphi)_x$ 只需证

$$\mathrm{St}(x,\eta)\subset U(F_0). \tag{1}$$

事实上, $\forall V(t)\in(\eta)_x$, $t\in X$, $x\in V(t)$. $\forall F\in\varphi\setminus(\varphi)_t$, $x\notin F$. 因 $x\in F_0$, $F_0\in(\varphi)_t$, 则 $V(t)\subset U(F_0)$. 从而

$\mathrm{St}(x,\eta)=\bigcup(\eta)_x\subset U(F_0)$. (1)真. 证毕.

2.2.11　定理　设 X 是正则空间, 则下列各条等价:

(Ⅰ) X 是仿紧的；

(Ⅱ) X 是完满正规的；

(Ⅲ) X 的每个开覆盖有局部有限且 σ-离散的函数开加细；

(Ⅳ) X 的每个开覆盖有局部有限函数开加细；

(Ⅴ) X 的每个开覆盖有 σ-离散的函数开加细；

(Ⅵ) X 的每个开覆盖有 σ-局部有限函数开加细；

(Ⅶ) 对 X 的每个开覆盖 ξ，X 上有局部有限的单位分解从属于 ξ；

(Ⅷ) 对 X 的每个开覆盖 ξ，X 上有单位分解从属于 ξ.

证 由2.1.11，2.2.4及2.2.10知(Ⅰ)↔(Ⅱ). 由2.1.29知(Ⅱ)与其余各条等价，证毕.

2.2.12 定义 设 $\xi=\{U_s:s\in S\}$ 是 X 的覆盖.

(Ⅰ) X 的子集族 $\eta=\{V_t:t\in T\}$ 是 ξ 的**部分垫状加细**或称 η 部分垫状加细 ξ，如果 $\exists f:T\to S$，叫**垫状函数**使得 $\forall T'\subset T$，

$$\overline{\bigcup\{V_t:t\in T'\}}\subset\bigcup\{U_{f(t)}:t\in T'\}.$$

若 η 还是 X 的覆盖，则称 η 的 ξ 是**垫状加细**.

(Ⅱ) η 是 ξ 的 σ-**垫状加细**，如果 $\eta=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\eta_n$ 是 X 的覆盖使得每个 η_n 部分垫状加细 ξ.

(Ⅲ) X 的覆盖 $\eta=\{V_t:t\in T\}$ 是 ξ 的**精确加细**，如果 $T=S$ 且 $\forall s\in S,V_s\subset=U_s$. η 是 ξ 的**精确垫状加细**，如果 $T=S$ 且垫状函数是恒同 id_S.

注 若空间 X 的覆盖 $\xi=\{U_s:s\in S\}$ 有垫状(开)加细 $\eta=\{V_t:t\in T\}$，则 ξ 必有精确垫状(开)加细. 事实上，设 $f:T\to S$ 是垫状函数. $\forall s\in S$，令

$$W_s=\bigcup\{V_t:f(t)=s\}.$$

则 $\{W_s:s\in S\}$ 即为 ξ 的精确垫状(开)加细.

X 的子集族 ξ 称为**互不相交的**，如果

$$\forall A,B\in\xi\ (A\neq B\rightarrow A\cap B=\varnothing).$$

ξ 称为 **σ-互不相交的**，如果 $\xi=\bigcup_{n<\omega}\xi_n$，每个 ξ_n 是互不相交的.

2.2.13　定义　(Ⅰ)　设基数 $\kappa\geqslant 2$. 空间 X 是 **κ- 集体正规的**，如果对 X 内任意的离散闭集族 $\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$，$X$ 内有互不相交开集族 $\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 使得 $\forall\alpha<\kappa, F_\alpha\subset U_\alpha$.

(Ⅱ)　空间 X 是**集体正规的**，如果 $\forall\kappa\geqslant 2$，X 是 κ- 集体正规的.

显然 κ- 集体正规空间是正规的.

2.2.14　引理　若空间 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖有垫状加细，则 X 是 κ- 集体正规的.

证　设 $\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 的离散闭集族. $\forall\alpha<\kappa$，令 $G_\alpha=X\setminus\bigcup\{F_\beta:\beta\neq\alpha\}$. 则 $\{G_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 的开覆盖. 由假设它有精确的垫状加细 $\{C_\alpha:\alpha<\kappa\}$. 令 $U_\alpha=X\setminus\overline{\bigcup\{C_\beta:\beta\neq\alpha\}}$，则 $\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是互不相交开集族，使得 $F_\alpha\subset U_\alpha$, $\alpha<\kappa$. 证毕.

2.2.15　引理　若空间 X 的开覆盖 ξ 有点星形开加细 η，则 ξ 有垫状加细.

证　令 $W(A)=\{x\in X:\mathrm{St}(x,\eta)\subset A\}$, $A\subset X$. $\forall x\in\overline{W(A)}\,\exists y\in\mathrm{St}(x,\eta)\cap W(A)$. $x\in St(y,\eta)\subset A$. 故有

$$\forall A\subset X\,(\overline{W(A)}\subset A).\tag{1}$$

$\forall x\in X\,\exists U\in\xi, \mathrm{St}(x,\eta)\subset U$，则 $x\in W(U)$. 于是 $\zeta=\{W(U):U\in\xi\}$ 是 X 的覆盖. $\forall\xi'\subset\xi$，由(1)知，

$$\overline{\bigcup\{W(U):U\in\xi'\}}\subset\overline{W(\bigcup\xi')}\subset\bigcup\xi'.$$

ζ 是 ξ 的垫状加细. 证毕.

2.2.16　系　(Ⅰ)　完满正规空间是集体正规的.

(Ⅱ)　(a)　正则仿紧空间是集体正规的；

(b)　(Bing[1951]) T_2 仿紧空间是集体正规的；

(Ⅱ) 对任意空间 X，下列各条等价.

(a) X 是T_1完满正规的；

(b) X 是T_1集体正规和仿紧的；

(c) X 是T_1正规和仿紧的；

(d) X 是T_2仿紧的.

2.2.17 引理 若空间 X 的每个开覆盖有垫状加细，则 X 的每个开覆盖有 σ- 离散开加细.

证 设 $\xi=\{U(\alpha):\alpha<\kappa\}$ 是 X 的开覆盖，κ 是无限基数. 先证下面的两个论断.

论断1 ξ 有一列精确垫状加细$\langle\eta_n\rangle$使得$\forall n<\omega$，$\eta_n=\{B(n,\alpha):\alpha<\kappa\}$且$\forall\alpha<\kappa$，有

$$\overline{\bigcup_{\beta<\alpha}B(n,\alpha)}\cap B(n+1,\alpha)=\varnothing, \tag{1}$$

$$B(n,\alpha)\cap\overline{\bigcup_{\beta>\alpha}B(n+1,\beta)}=\varnothing. \tag{2}$$

证 由假设 ξ 有精确垫状加细$\eta_0=\{B(0,\alpha):\alpha<\kappa\}$. 现设$\forall i\leqslant n$已构成 ξ 的精确垫状加细η_i 合条件(1)和(2)，下面来构造η_{n+1}. 令

$$G(n+1,\alpha)=U(\alpha)\setminus\overline{\bigcup_{\beta<\alpha}B(n,\beta)},\alpha<\kappa.$$

$\forall x\in X$，存在最小的 $\alpha<\kappa$，使得 $x\in U(\alpha)$. 由归纳法假设，

$$\overline{\bigcup\{B(n,\beta):\beta<\alpha\}}\subset\bigcup\{U(\beta):\beta<\alpha\},$$

则 $x\in G(n+1,\alpha)$. 于是$\{G(n+1,\alpha):\alpha<\kappa\}$是 X 的开覆盖，从而有一个精确垫状加细$\eta_{n+1}=\{B(n+1,\alpha):\alpha<\kappa\}$，它也是 ξ 的精确垫状加细. $\forall\alpha<\kappa$，

$$\overline{\bigcup_{\beta<\alpha}B(n,\beta)}\cap B(n+1,\alpha)\subset\overline{\bigcup_{\beta<\alpha}B(n,\beta)}\cap G(n+1,\alpha)=\varnothing.$$

其次，$\forall x\in\overline{\bigcup_{\beta>\alpha}B(n+1,\beta)}\subset\bigcup_{\beta>\alpha}G(n+1,\beta)$，$\exists\beta_0>\alpha$，$x\in G(n+1,\beta_0)$，$x\notin B(n,\alpha)$，故

$$\overline{\bigcup_{\beta>\alpha}B(n+1,\beta)}\cap B(n,\alpha)=\varnothing.$$

η_{n+1}合(1)和(2). 论断1真.

$\forall n<\omega,\alpha<\kappa$,令

$$V(n,\alpha)=X\setminus\overline{\bigcup\{B(n,\beta):\beta\neq\alpha\}}.$$

论断2　$\zeta=\{V(n,\alpha):n<\omega,\alpha<\kappa\}$是 X 的开覆盖,使得$\forall n<\omega,\alpha<\kappa$,

$$V(n,\alpha)\subset B(n,\alpha)\subset U(\alpha),\tag{3}$$

$$\text{若 }\alpha\neq\beta,\text{则 }V(n,\alpha)\cap B(n,\beta)=\varnothing.\tag{4}$$

证　设 $x\in X,\forall n<\omega$,令

$$\alpha_n=\min\{\alpha<\kappa:x\in B(n,\alpha)\},$$

$$\alpha_m=\min\{\alpha_n:n<\omega\}.$$

由 $x\in B(m,\alpha_m)$及(2)知,$x\notin\overline{\bigcup_{\beta>\alpha_m}B(m+1,\beta)}$. 又由 $x\in B(m+2,\alpha_{m+2})$,(1)及$\alpha_m\leqslant\alpha_{m+2}$知,$x\notin\overline{\bigcup_{\beta<\alpha_m}B(m+1,\beta)}$. 于是 $x\in V(m+1,\alpha_m)$,$\bigcup\zeta=X$. 其次,因$\bigcup\eta_n=X$,$V(n,\alpha)\subset X\setminus\bigcup\{B(n,\beta):\beta\neq\alpha\}\subset B(n,\alpha)\subset U(\alpha)$. 若 $\alpha\neq\beta$,则

$$V(n,\alpha)\cap B(n,\beta)\subset V(n,\alpha)\cap\overline{\bigcup_{\gamma\neq\alpha}B(n,\gamma)}=\varnothing.$$

(3),(4)真. 论断2真.

由论断2及假设知,ζ有精确垫状加细$\{C(n,\alpha):n<\omega,\alpha<\kappa\}$. 则$\forall n<\omega$,$\overline{\bigcup_{\alpha<\kappa}C(n,\alpha)}\subset\bigcup_{\alpha<\kappa}V(n,\alpha)$. 据2.2.14,$X$ 是正规的,存在开集W_n,使得

$$\overline{\bigcup_{\alpha<\kappa}C(n,\alpha)}\subset W_n\subset\overline{W_n}\subset\bigcup_{\alpha<\kappa}V(n,\alpha).$$

下证$\forall n<\omega$,有

$$\gamma_n=\{V(n,\alpha)\cap W_n:\alpha<\kappa\}\text{是离散开集族}.\tag{5}$$

事实上,设$x\in X$. 若$x\notin\bigcup_{\alpha<\kappa}V(n,\alpha)$,则 x 的邻域 $X\setminus\overline{W_n}$与 γ_n 的每个元不相交. 若$\exists\alpha<\kappa,x\in V(n,\alpha)$,由(3),(4)知$\forall\beta\neq\alpha$,有

$$V(n,\alpha)\cap V(n,\beta)\cap W_n\subset V(n,\alpha)\cap B(n,\beta)=\varnothing.$$

这就证明了(5)式. 令 $\gamma=\bigcup_{n<\omega}\gamma_n$. $\forall x\in X$ $\exists n<\omega\exists\alpha<\kappa, x\in C(n,\alpha)\subset\overline{C(n,\alpha)}\subset V(n,\alpha)$. 又 $x\in W_n$. 故 $x\in\bigcup\gamma_n$. γ 是 X 的开覆盖,从而由(3),(5)知,它就是 ξ 的 σ-离散开加细. 证毕.

2.2.18 定理 (Michael[1953,1959]) 设 X 是正则空间,则下列各条等价:

(Ⅰ) X 是仿紧的;

(Ⅱ) X 的每个开覆盖有垫状加细;

(Ⅲ) X 的每个开覆盖有 σ-离散开加细;

证(Ⅰ)→(Ⅱ)由2.2.11及2.2.15知.(Ⅱ)→(Ⅲ)由2.2.17知.(Ⅲ)→(Ⅰ)由2.2.4知. 证毕.

2.2.19 引理 若空间 X 的开覆盖 ξ 有 σ-垫状开加细 η,则 ξ 有垫状加细.

证 设 $\xi=\{U(s):s\in S\}$ 且 $\eta=\bigcup_{n<\omega}\eta_n$,每个 η_n 部分垫状加细 ξ. 不妨设 $\eta_n=\{V(n,s):s\in S\}$,使得 $\forall S'\subset S$,有

$$\overline{\bigcup\{V(n,s):s\in S'\}}\subset\{U(s):s\in S'\}.$$

$\forall y\in X$, 令 $n(y)=\min\{n<\omega:y\in\bigcup\eta_n\}$. 令

$$G(y)=\bigcup\eta_{n(y)}\setminus\bigcup_{n=0}^{n(y)}\overline{\bigcup\{V(n,s):y\notin U(s)\}}.$$

因 $\bigcup_{n=0}^{n(y)}\overline{\bigcup\{V(n,s):s\in S,y\notin U(s)\}}\subset\bigcup\{U(s):s\in S,y\notin U(s)\}$, $G(y)\in N(y)$. $\forall x\in X, x\in\bigcup\eta_{n(x)}$. $\exists h(x)\in S, x\in V(n(x),h(x))$. 易知

$$若\ y\notin U(h(x)),则\ x\notin G(y). \tag{1}$$

令 $W_s=\{x\in X:h(x)=s\}, s\in S$. $\forall S'\subset S$, 若 $y\notin\bigcup\{U(s):s\in S'\}$,由(1)知, $G(y)\cap\bigcup\{W_s:s\in S'\}=\varnothing$. 故

$$\overline{\bigcup\{W_s:s\in S'\}}\subset\bigcup\{U(s):s\in S'\}$$

于是 $\gamma=\{W_s:s\in S\}$ 是 ξ 的垫状加细. 证毕.

2.2.20 定义 (Ⅰ)空间 X 的子集族 ξ 是闭包保持的,如果 $\forall\eta$

$\subset \xi$,

$$\overline{\bigcup \{A : A \in \eta\}} = \bigcup \{\overline{A} : A \in \eta\}.$$

(Ⅱ)ξ是σ-**闭包保持的**，如果ξ是可数多个闭包保持集族的并.由蒲保明等[1985]2.4.3知，局部有限子集族是闭包保持的.

2.2.21　定理　(Michael[1953])　设X是正则空间，则下列各条等价：

(Ⅰ)　X是仿紧的；

(Ⅱ)　X是每个开覆盖有垫状开加细；

(Ⅲ)　X的每个开覆盖有σ-垫状开加细.

证　(Ⅰ)→(Ⅱ)设ξ是正则仿紧空间X的开覆盖.X有开覆盖η，使得$\{\overline{V} : V \in \eta\}$加细$\xi$.设$\nu$是$\eta$的局部有限开加细，则$\nu$是$\xi$的垫状开加细.

(Ⅱ)→(Ⅲ)显然.(Ⅲ)→(Ⅰ)由2.1.18与2.1.19知.证毕.

2.2.22　定理　(Michael[1957])　设X是正则空间，则下列各条等价：

(Ⅰ)　X是仿紧的；

(Ⅱ)　X的每个开覆盖有闭包保持开加细；

(Ⅲ)　X的每个开覆盖有σ-闭包保持开加细；

(Ⅳ)　X的每个开覆盖有闭包保持闭加细.

证　(Ⅰ)→(Ⅱ)与(Ⅱ)→(Ⅲ)显然.

(Ⅲ)→(Ⅰ)，设ξ是X的开覆盖.设η是X的开覆盖，使得$\{\overline{V} : V \in \eta\}$加细$\xi$.设$\nu = \bigcup_{n<\omega} \nu_n$是$\eta$的开加细，使得每个$\nu_n$是闭包保持的.则$\nu$也是$\xi$的$\sigma$-垫状开加细.据2.2.21，$X$是仿紧的.

(Ⅰ)→(Ⅳ)由2.2.4知.

(Ⅳ)→(Ⅰ)因闭包保持闭加细是垫状加细，由2.2.18知.证毕

2.2.23　系　对任意空间X，下列各条等价：

（Ⅰ） X 是 T_2 仿紧的；

（Ⅱ） X 是 T_1 的且 X 的每个开覆盖有局部有限闭加细；

（Ⅲ） X 是 T_1 的且 X 的每个开覆盖有闭包保持闭加细；

（Ⅳ） X 是 T_1 的且 X 的每个开覆盖有垫状加细；

（Ⅴ） X 是 T_1 的且 X 的每个开覆盖有垫状开加细；

（Ⅵ） X 是 T_1 的且 X 的每个开覆盖有 σ-垫状开加细．

证 （Ⅰ）→（Ⅱ）由 2.2.2 及 2.2.4 知．

（Ⅱ）→（Ⅲ）及（Ⅲ）→（Ⅳ）显然．

（Ⅳ）→（Ⅰ）由 2.2.14 及 2.2.18 知．

（Ⅰ）→（Ⅴ）由 2.2.16 及 2.2.21 知．

（Ⅴ）→（Ⅵ）显然．

（Ⅵ）→（Ⅳ）由 2.2.19 知．证毕．

函数 $f: X\to Y$ 称为闭的，如果对每个闭集 $A\subset X$，$f[A]$闭于 Y.

2.2.24 引理 设 $f: X\to Y$，则下列各条等价：

（Ⅰ） f 是闭函数；

（Ⅱ） $\forall B\subset Y\forall U\in N(f^{-1}[B])\exists V\in N(B)(f^{-1}[V]\subset U)$；

（Ⅲ） $\forall y\in Y\forall U\in N(f^{-1}[y])\exists V\in N(y)(f^{-1}[V]\subset U)$.

证 见蒲保明等[1985]3.1.16.

2.2.25 定理 设 X 是 T_2 仿紧的且 $f: X\to Y$ 是闭的满映射，则 Y 是 T_2 仿紧的.

证 设 ξ 是 Y 的开覆盖，据 2.2.23，X 的开覆盖$\{f^{-1}[U]: U\in\xi\}$有闭包保持闭加细 φ，则$\{f[F]: F\in\varphi\}$是 ξ 的闭包保持闭加细．因 Y 是 T_1 的，据 2.2.23，Y 是 T_2 仿紧的．证毕．

2.2.26 定义 函数 $f: X\to Y$ 是完备的，如果 f 是闭映射使得 $\forall y\in Y$，$f^{-1}[y]$是 X 的紧子集．

2.2.27 引理 设 X 是紧空间，则对任意空间 Y，投射

$$p: X\times Y\to Y,\quad p(x,y)=y$$

是完备映射．

证　$\forall y\in Y$, $p^{-1}[y]=X\times\{y\}$是紧子集．其次$\forall U\in N(p^{-1}[y])$，据蒲保明等[1985]4.2.16，$\exists V\in N(y)$，$X\times V\subset U$. 即$p^{-1}[V]\subset U$. 据 2.2.24，$p$ 是闭映射．证毕．

2.2.28　引理　设 $f: X\to Y$ 是完备满映射且 Y 是仿紧空间，则 X 是仿紧空间．

证　设 ξ 是 X 的开覆盖．$\forall y\in Y$，$f^{-1}[y]$是紧的，从而有有限子族 $\xi(y)\subset\xi$，使得 $f^{-1}[y]\subset\bigcup\xi(y)$. 则存在 $V(y)\in N(y)$，$f^{-1}[V(y)]\subset\bigcup\xi(y)$. Y 的开覆盖$\{V(y): y\in Y\}$有一个局部有限开加细 γ. $\forall W\in\gamma\,\exists y(W)\in Y$，使得 $W\subset V(y(W))$. 令

$$\eta=\{f^{-1}[W]\cap U: W\in\gamma, U\in\xi(y(W))\}.$$

易知 η 是 ξ 的局部有限开加细．X 是仿紧的．证毕．

2.2.29　系　设 X 是紧空间且 Y 是仿紧空间．则 $X\times Y$ 是仿紧空间．

证　由 2.2.27 及 2.2.28 知．证毕．

下面我们给出完满正规空间的一组新刻画，首先来证明几个引理．

2.2.30　引理　设 η 是空间 X 的开覆盖且$\{H_\alpha: \alpha<\kappa\}$是 X 的子集族．令

$$G_\alpha=\overline{H}_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{St}(H_\beta,\eta),\ \alpha<\kappa.$$

则 $\varphi=\{G_\alpha: \alpha<\kappa\}$是 X 内的离散闭集族．

证　设 $x\in X$. 分下列两种情形讨论：

情形 I　若 $x\notin\overline{\bigcup_{\alpha<\kappa}G_\alpha}$. 这时 $X\setminus\overline{\bigcup_{\alpha<\kappa}G_\alpha}$是 x 的邻域且与每个 G_α 不相交．

情形 II　若 $x\in\overline{\bigcup_{\alpha<\kappa}G_\alpha}$. 这时$\exists\alpha_0<\kappa$，$\mathrm{St}(x,\eta)\cap G_{\alpha_0}\neq\varnothing$. 于是

$\mathrm{St}(G_{\alpha_0},\eta)\in N(x)$. $\forall\alpha<\kappa$,

(a) 若 $\alpha<\alpha_0$,则

$$G_{\alpha_0}\cap \mathrm{St}(\overline{H}_\alpha,\eta)=G_{\alpha_0}\cap \mathrm{St}(H_\alpha,\eta)$$
$$\subset (X\setminus \bigcup_{\beta<\alpha_0}\mathrm{St}(H_\beta,\eta))\cap \mathrm{St}(H_\alpha,\eta)=\varnothing.$$

则 $\mathrm{St}(G_{\alpha_0},\eta)\cap\overline{H}_\alpha=\varnothing$. 因 $G_\alpha\subset\overline{H}_\alpha$,

$$\mathrm{St}(G_{\alpha_0},\eta)\cap G_\alpha=\varnothing.$$

(b) 若 $\alpha>\alpha_0$. 因 $G_{\alpha_0}\subset\overline{H}_{\alpha_0}$,

$$G_\alpha\subset X\setminus \bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{St}(H_\beta,\eta)\subset X\setminus \mathrm{St}(H_{\alpha_0},\eta)$$
$$=X\setminus \mathrm{St}(\overline{H}_{\alpha_0},\eta)\subset X\setminus \mathrm{St}(G_{\alpha_0},\eta).$$

故 $\mathrm{St}(G_{\alpha_0},\eta)\cap G_\alpha=\varnothing$. 于是$\forall\alpha\neq\alpha_0$,$\mathrm{St}(G_{\alpha_0},\eta)\cap G_\alpha=\varnothing$. φ 在 x 是离散的．证毕．

2.2.31 引理 设 η 是空间 X 的开覆盖且 $U\subset X$.

(Ⅰ) 令 $C(U)=\{x\in X: \mathrm{St}(x,\eta)\subset U\}$,则 $C(U)$是闭集且 $C(U)\subset U$.

(Ⅱ) 令 $H(U)=\{x\in X: \exists G\in N(x),\mathrm{St}(G,\eta)\subset U\}$. 则 $H(U)$ 是开集且$\overline{H(U)}\subset U$.

证 (Ⅰ) 显然 $C(U)\subset U$. 若$\exists x\in\overline{C(U)}\setminus C(U)$. 则 $x\notin C(U)$,从而$\exists y\in \mathrm{St}(x,\eta)\setminus U$. 于是 $y\notin U$ 且 $\mathrm{St}(y,\eta)\in N(x)$. 因 $x\in\overline{C(U)}$,$\exists p\in \mathrm{St}(y,\eta)\cap C(U)$. $y\in \mathrm{St}(p,\eta)\subset U$,矛盾．故$\overline{C(U)}=C(U)$.

(Ⅱ)$\forall x\in H(U)\exists G\in N(x)$,$\mathrm{St}(G,\eta)\subset U$. 则 $G\subset H(U)$. $H(U)$是开集. 现证$\overline{H(U)}\subset U$. 设 $x\in\overline{H(U)}$. 则$\exists y\in \mathrm{St}(x,\eta)\cap H(U)$. $\exists G\in N(y)$,$\mathrm{St}(G,\eta)\subset U$. 则

$$x\in \mathrm{St}(y,\eta)\subset \mathrm{St}(G,\eta)\subset U.$$

$\overline{H(U)}\subset U$. 证毕.

2.2.32 引理 若空间 X 的开覆盖 ξ 有 σ-离散闭加细 φ,使

得$\{F^\circ : F\in\varphi\}$覆盖 X. 则 ξ 有开的局部星形加细序列.

证　设 $\varphi=\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$, 每个 $\varphi_n=\{F_{ns} : s\in S_n\}$是离散闭集族. $\forall n<\omega$ $\forall s\in S_n \exists U_{ns}\in\xi, F_{ns}\subset U_{ns}$. 令

$$V_{ns}=U_{ns}\setminus\bigcup\{F_{nt} : t\in S_n\setminus\{s\}\}, n<\omega, s\in S_n.$$

则 V_{ns}是开集且 $F_{ns}\subset V_{ns}$. 族

$$\eta_n=\{V_{ns} : s\in S_n\}\cup\{X\setminus\bigcup_{s\in S_n}F_{ns}\}$$

是 X 的开覆盖. 易知$\langle\eta_n\rangle$是 ξ 的开的局部星形加细序列. 证毕.

2.2.33　定理　空间 X 是完满正规的当且仅当 X 的每个开覆盖有一个 σ-离散的闭加细 φ, 使得$\{F^\circ : F\in\varphi\}$覆盖 X.

证　($\leftarrow$)由 2.2.32 知.

($\rightarrow$)设 $\xi=\{U_\alpha : \alpha<\tau\}$是完满正规空间 X 的开覆盖, 其中 α,τ 是序数. 则 X 有一列开覆盖$\langle\eta_n\rangle$, 使得 η_0 是 ξ 的局部星形加细 $\forall n<\omega$, η_{n+1}是 η_n 的局部星形加细. $\forall m<\omega, \alpha<\tau$, 令

$$H(m,\alpha)=\{x\in X : \exists G\in N(x)(\mathrm{St}(G,\eta_m)\subset U_\alpha)\},$$

则 $H(m,\alpha)$是开集且$\overline{H(m,\alpha)}\subset U_\alpha$. $\{H(0,\alpha) : \alpha<\tau\}$覆盖 X. $\forall m,n<\omega, \alpha<\tau$, 令

$$F(m,n,\alpha)=\overline{H(m,\alpha)}\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{St}(H(m,\alpha),\eta_n),$$

则 $F(m,n,\alpha)$是闭集. $F(m,n,\alpha)\subset\overline{H(m,\alpha)}\subset U_\alpha$, 且 $\varphi_{mn}=\{F(m,n,\alpha) : \alpha<\tau\}$是 X 内的离散族. 于是 $\varphi=\bigcup_{m,n<\omega}\varphi_{mn}$是 ξ 的 σ-离散的部分加细. 只需再证

$$\bigcup\{F^\circ : F\in\varphi\}=X. \tag{1}$$

设 $x\in X$. 令 $A(x)=\{\alpha<\tau : \exists m<\omega(x\in H(m,\alpha))\}$, $\alpha(x)=\min A(x)$, 则 $\alpha(x)\in A(x)$. 设 $m(x)<\omega$, 使得

$$x\in H(m(x),\alpha(x))\subset\overline{H(m(x),\alpha(x))}.$$

其次, 因 $\eta_{m(x)+1}$是 $\eta_{m(x)}$的局部星形加细, 存在 $G_x\in N(x)$ $\exists V\in$

$\eta_{m(x)}$, $\mathrm{St}(G_x,\eta_{m(x)+1})\subset V$. 若$\exists\beta<\alpha(x)$, 使得$\exists y\in H(m(x),\beta)\cap\mathrm{St}(G_x,\eta_{m(x)+1})\subset H(m(x),\beta)\cap V$, 则 $y\in H(m(x),\beta)$. 因 $\beta<\alpha(x)$, $\beta\notin A(x)$. $\forall m<\omega$, $x\notin H(m,\beta)$. 特别地, $x\notin H(m(x)+1,\beta)$. 于是$\forall G\in N(x)$, $\mathrm{St}(G,\eta_{m(x)+1})\not\subset U_\beta$. 特别地, $\mathrm{St}(G_x,\eta_{m(x)+1})\not\subset U_\beta$. 故 $V\not\subset U_\beta$. $\forall W\in N(y)$, $y\in W\cap V\neq\varnothing$, 故 $V\subset\mathrm{St}(W,\eta_{m(x)})$. 由此知, $\forall W\in N(y)$, $\mathrm{St}(W,\eta_{m(x)})\not\subset U_\beta$. 故 $y\notin H(m(x),\beta)$. 矛盾. 故有$\forall\beta<\alpha(x)$, $H(m(x),\beta)\cap\mathrm{St}(G_x,\eta_{m(x)+1})=\varnothing$. 则

$$G_x\cap\mathrm{St}(H(m(x),\beta),\eta_{m(x)+1})=\varnothing,$$

$$G_x\subset X\setminus\bigcup_{\beta<\alpha(x)}\mathrm{St}(H(m(x),\beta),\eta_{m(x)+1}),$$

$$x\in\overline{H(m(x),\alpha(x))}^{\circ}\cap(X\setminus\bigcup_{\beta<\alpha(x)}\mathrm{St}(H(m(x),\beta),\eta_{m(x)+1}))^{\circ}$$

$$=(F(m(x),m(x)+1,\alpha(x)))^{\circ}.$$ (1)真. 证毕.

2.2.34 系 若空间 X 有一个可数开覆盖$\{U_i:i<\omega\}$, 使得每个 $\overline{U}_i$ 是 X 的完满正规子空间. 则 X 是完满正规的.

证 设 ξ 是 X 的开覆盖. $\forall i<\omega$, $\xi|\overline{U}_i$ 是 $\overline{U}_i$ 的开覆盖, 从而有一个在 $\overline{U}_i$ 内的闭加细 $\eta_i=\bigcup_{j<\omega}\eta_{ij}$, 使得每个 η_{ij}是 $\overline{U}_i$ 内的离散闭集族, 且$\{\mathrm{Int}_{\overline{U}_i}(C):C\in\eta_i\}$覆盖 $\overline{U}_i$. 则每个 η_{ij}是 X 内的离散闭集族. 令 $\eta=\bigcup_{i<\omega}\eta_i$, 则 $X=\bigcup\eta$. 于是 η 是 ξ 的 σ-离散闭加细. 只需再证$\{C^{\circ}:C\in\eta\}$覆盖 X. 设 $x\in X$. $\exists i<\omega$, $x\in\overline{U}_i$. $\exists C\in\eta_i$, $x\in\mathrm{Int}_{\overline{U}_i}(C)$. 则

$$x\in\overline{U}_i^{\circ}\cap\mathrm{Int}_{\overline{U}_i}(C)=C^{\circ}.$$

故 X 是完满正规的. 证毕.

2.2.35 定理 空间 X 是完满正规的当且仅当 X 的每个开覆盖有一列开加细$\langle\eta_n\rangle$, 使得$\forall x\in X\ \exists n<\omega\exists G\in N(x)(|(\eta_n)_G|=1)$.

证 ($\rightarrow$)设 ξ 是完满正规空间 X 的开覆盖, 则 ξ 有一个加细 $\varphi=\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$, 每个 φ_n 是离散闭集族且$\{F^{\circ}:F\in\varphi\}$覆盖 X. $\forall F\in\varphi$ 取定一个 $U(F)\in\xi$, 使得 $F\subset U(F)$. $\forall x\in X$, 取一个 $U_x\in\xi$, 使得 $x\in U_x$. $\forall n$

$<\omega, x\in X$，当 $x\notin\bigcup\varphi_n$ 时，令 $V_n(x)=U_x\setminus\bigcup\varphi_n$. 当$\exists!\ F(x,n)\in\varphi_n$，使得 $x\in F(x,n)$时，令

$$V_n(x)=U(F(x,n))\setminus\bigcup(\varphi_n\setminus\{F(x,n)\}),$$

则 $V_n(x)\in N(x)$. $\eta_n=\{V_n(x): x\in X\}$是 ξ 的开加细. $\forall x\in X\exists n<\omega\exists!$ $F(x,n)\in\varphi_n$，使得 $x\in F(x,n)^\circ$，则

$$x\in V_n(x)=U(F(x,n))\setminus\bigcup(\varphi_n\setminus\{F(x,n)\}).$$

易知

$$(\eta_n)_{\{x\}}=\{V_n(x)\}.$$

($\Leftarrow$)设 ξ 是空间 X 的开覆盖. 由假设，ξ 有一列开加细$\langle\eta_n\rangle$，使得$\forall x\in X\ \exists n<\omega\ \exists G\in N(x)$使得$|(\eta_n)_G|=1$. 因此$\langle\eta_n\rangle$是 ξ 的开的局部星形加细序列，从而 X 是完满正规的. 证毕.

2.2.36　定理　对任意空间 X，下列各条等价：

(Ⅰ)　X 是完满正规的；

(Ⅱ)　X 的每个开覆盖有 σ-局部有限闭加细 φ，使得$\{F^\circ: F\in\varphi\}$覆盖 X；

(Ⅲ)　X 的每个开覆盖有 σ-闭包保持闭加细 φ，使得$\{F^\circ: F\in\varphi\}$覆盖 X；

证　(Ⅰ)→(Ⅱ)由 2.2.33 知. (Ⅱ)→(Ⅲ)显然.

(Ⅲ)→(Ⅰ)设 $\xi=\{U_\alpha: \alpha<\tau\}$是 X 的开覆盖，其中 α,τ 是序数. 先证下面的论断.

论断 1　(a)$\forall n<\omega, s\in\omega^n$，$X$ 有开覆盖 $\eta(s)$且 $\eta(s)$有加细 $\zeta(s)=\bigcup\{\varphi(s+i_n): i_n<\omega\}$，使得每个 $\varphi(s+i_n)$是闭包保持闭集族且$\{F^\circ: F\in\zeta(s)\}$覆盖 X.

(b) $\eta(\varnothing)=\xi$ 且$\forall s\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega^n$，

$$\eta(s)=\{U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}F(s,\beta): \alpha<\tau\},$$

其中 $F(s,\beta)=\bigcup\{F\in\varphi(s): F\subset U_\beta\}$.

证　令 $\eta(\varnothing)=\xi$. 由假设(Ⅱ), $\eta(\varnothing)$ 有加细 $\zeta(i_0)=\bigcup_{i_0<\omega}\varphi(i_0)$, 使得每个 $\varphi(i_0)$ 是闭包保持闭集族且 $\{F^\circ : F\in\zeta(i_0)\}$ 覆盖 X. 令

$$F(i_0,\alpha)=\bigcup\{F\in\varphi(i_0) : F\subset U_\alpha\},\alpha<\tau.$$

$$\eta(i_0)=\{U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}F(i_0,\beta) : \alpha<\tau\}.$$

则 $\eta(i_0)$ 是 X 的开覆盖. 现设 $n\in N$ 且设 $\forall k\leqslant n$ $\forall s\in\omega^k$, 已构成 X 的开覆盖 $\eta(s)$ 及 $\eta(s)$ 的加细 $\zeta(s)=\bigcup\{\varphi(s+i_k) : i_k<\omega\}$, 使得每个 $\varphi(s+i_k)$ 是闭包保持闭集族, $\{F^\circ : F\in\zeta(s)\}$ 覆盖 X. 且

$$\eta(s)=\{U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}F(s,\beta) : \alpha<\tau\},$$

其中 $F(s,\beta)=\bigcup\{F\in\varphi(s) : F\subset U_\beta\}$.

设 $t\in\omega^{n+1}$. 则 $\exists s\in\omega^n, t=s+t(n)$. 由归纳法假设及假设(Ⅱ), X 的开覆盖 $\eta(s)(s\in\omega^n)$ 有加细 $\zeta(s)=\bigcup\{\varphi(s+i_n) : i_n<\omega\}$, 使得每个 $\varphi(s+i_n)$ 是闭包保持闭集族且 $\{F^\circ : F\in\zeta(s)\}$ 覆盖 X. 现设 $t(n)=i_n<\omega$. 令 $F(t,\alpha)=\bigcup\{F\in\varphi(t) : F\subset U_\alpha\},\alpha<\tau$.

$$\eta(t)=\{U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}F(t,\beta) : \alpha<\tau\}.$$

则 $\eta(t)$ 是 X 的开覆盖. 由假设(Ⅱ), $\eta(t)$ 有一个加细 $\zeta(t)=\bigcup\{\varphi(t+i_{n+1} : i_{n+1}<\omega\}$, 使得每个 $\varphi(t+i_{n+1})$ 是闭包保持闭集族且 $\{F^\circ : F\in\zeta(t)\}$ 覆盖 X. 由归纳法知, 论断 1 真.

$\forall s,t\in\omega^{<\omega}$　$\forall\alpha<\tau$, 令

$$C(s,t,\alpha)=\bigcup\{F\in\varphi(s) : F\subset U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}F(t,\beta)\}.$$

论断 2　$\forall s,t\in\omega^{<\omega}$,

$$\delta_{st}=\{F(s,\alpha)\cap C(t,s,\alpha) : \alpha<\tau\}$$

是 X 内的离散闭集族.

证　若 $\exists\alpha,\beta<\tau,\alpha\neq\beta$, 使得

$$\exists y\in F(s,\alpha)\cap C(t,s,\alpha)\cap F(s,\beta)\cap C(t,s,\beta)$$

不妨设 $\alpha<\beta$. 因 $y\in C(t,s,\beta)\exists F\in\varphi(t)$, 使得 $y\in F\subset U_\beta\setminus\bigcup_{\gamma<\beta}F(s,\gamma)$.

故 $y\notin F(s,\alpha)$，矛盾. 于是 δ_{st}是互不相交闭集族. 由习题 2. A 知，只需再证 δ_{st}是闭包保持的. 事实上，因 $\varphi(s)$与 $\varphi(t)$是闭包保持闭集族，$\{F(s,\alpha):\alpha<\tau\}$与$\{C(t,s,\alpha):\alpha<\tau\}$是闭包保持闭集族. 结果 δ_{st}是闭包保持闭集族. 论断 2 真.

$$F(s,\alpha)\cap C(t,s,\alpha)\subset F(s,\alpha)\subset U_\alpha$$

于是 $\delta=\bigcup\{\delta_{st}:s,t\in\omega^{<\omega}\}$是 ξ 的 σ - 离散闭的部分加细. 为证 X 是完满正规的，只需再证

$$\bigcup\{D^\circ:D\in\delta\}=X \tag{1}$$

设 $x\in X$，令

$$A(x)=\{\alpha<\tau:\exists s\in\omega^{<\omega}\exists F\in\varphi(s)(x\in F^\circ\subset U_\alpha)\}.$$

则 $A(x)\neq\varnothing$. 令 $\alpha(x)=\min A(x)$，则 $\exists s(x)\in\omega^{<\omega}\exists F_0\in\varphi(s(x))$，$x\in F_0^\circ\subset U_{\alpha(x)}$. 于是 $x\in F_0^\circ\subset F(s(x),\alpha(x))^\circ$. 设 $s(x)\in\omega^n$，则$\exists i_n<\omega\exists F_1\in\varphi(s(x)\dotplus i_n)$，使得 $x\in F_1{}^\circ$. 又$\exists V\in\eta(s(x))$，$F_1\subset V$，从而 $F_1{}^\circ\subset V$. 设

$$V=U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}F(s(x),\beta),$$

则 $\alpha=\alpha(x)$. 于是

$$x\in F_1\subset V=U_{\alpha(x)}\setminus\bigcup_{\beta<\alpha(x)}F(s(x),\beta),$$

$$x\in F^\circ{}_1\subset F_1\subset C(s(x)\dotplus i_n,s(x),\alpha(x)).$$

故

$$x\in(F(s(x),\alpha(x))\cap C(s(x)\dotplus i_n,s(x),\alpha(x))^\circ,$$

(1)真. 定理证毕.

2. 2. 37　定理　设 X 是正则空间，Y 是完满正规空间且 $f:X\to Y$ 是完备满映射. 则 X 是完满正规的.

证　设 ξ 是 X 的开覆盖. 设 η 是 X 的开覆盖，使得$\{\overline{V}:V\in\eta\}$加细 ξ. $\forall y\in Y\exists$有限子族 $\eta(y)\subset\eta$，使得 $f^{-1}[y]\subset\bigcup\eta(y)$. $\exists G(y)\in N(y)$，$f^{-1}[G(y)]\subset\bigcup\eta(y)$. $\{G(y):y\in Y\}$是 Y 的开覆盖，从而有一个加细 $\zeta=\bigcup_{n<\omega}\zeta_n$，使得每个 ζ_n 是离散闭集族且$\{P^\circ:P\in\zeta\}$覆盖 Y.

$\forall n<\omega \forall P\in\zeta_n \exists y(n,P)\in Y(P\subset G(y(n,P)))$，从而 $f^{-1}[P]\subset U\eta(y(n,P))$. 令

$$\varphi_n=\{f^{-1}[P]\cap V : P\in\zeta_n, V\in\eta(y(n,P))\},$$

则 φ_n 是局部有限的. 令 $\varphi=\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，则 $\{F^\circ : F\in\varphi\}$ 覆盖 X. $\forall n<\omega$ 令 $\varphi_n'=\{\overline{F} : F\in\varphi_n\}$. 则 $\varphi'=\bigcup_{n<\omega}\varphi_n'$ 是 ξ 的 σ－局部有限闭加细且 $\{F^\circ : F\in\varphi'\}$ 覆盖 X. X 是完满正规的. 证毕.

2.2.38 定义 满函数 $f: X\to Y$ 是**几乎开的**如果，

$$\forall y\in Y \exists x\in f^{-1}[y] \forall U\in N(x)(y\in(f[U])^\circ).$$

2.2.39 定理 设 X 是完满正规空间且 $f: X\to Y$ 是几乎开的闭映射. 则 Y 是完满正规的.

证 设 ξ 是 Y 的开覆盖，则 $\{f^{-1}[U] : U\in\xi\}$ 是 X 的开覆盖，从而它有一个 σ- 闭包保持闭加细 φ，使得 $\{F^\circ : F\in\varphi\}$ 覆盖 X. 于是 $\{f[F] : F\in\varphi\}$ 是 ξ 的 σ- 闭包保持闭加细. 只需再证 $\{f[F]^\circ : F\in\varphi\}$ 覆盖 Y. 设 $y\in Y$，则 $\exists x\in f^{-1}[y]\forall U\in N(x), y\in f[U]^\circ$. 因 $\exists F\in\varphi, x\in F^\circ$. 则 $y\in f[F^\circ]^\circ\subset f[F]^\circ$. Y 是完满正规的. 证毕.

§2.3 κ－仿紧空间

作为可数紧空间与仿紧空间的公共推广，Dowker[1951]与Katětov[1951]独立地引入了可数仿紧空间. Dowker 论文的一个重要结果是，空间 X 的正规可数仿紧性刻画了积空间 $X\times I$ 的正规性. 其后，为了刻画积空间 $X\times I^\kappa$ 的正规性，Morita[1962]引入了 κ－仿紧空间. κ－仿紧空间的研究进一步加深了人们对仿紧空间的认识.

2.3.1 定义 设基数 $\kappa\geqslant\omega$，空间 X 是 **κ－仿紧的**，如果它的每

个势$\leqslant\kappa$的开覆盖有局部有限开加细. ω－仿紧空间又称为**可数仿紧空间**.

显然，可数紧与仿紧空间皆是可数仿紧空间. 另一方面，据蒲保明等[1985]4.3.5知，ω_1是可数紧的非紧空间，据2.2.7，ω_1是非仿紧的可数仿紧空间.

2.3.2　定义　设ξ是X的子集族，记

$$\xi^F=\{\bigcup\eta:\eta\subset\xi,|\eta|<\omega\}.$$

(Ⅰ)　ξ是**定向的**，如果ξ^F是ξ的部分加细.

(Ⅱ)　ξ是**良序的**，如果包含关系$\subset$是ξ上的良序.

2.3.3　定义　设$\xi=\{U_s:s\in S\}$，$\eta=\{V_t:t\in T\}$是X的开覆盖.

(Ⅰ)　η是ξ的**强加细**，如果$\{\overline{V}_t:t\in T\}$是$\xi$的加细.

(Ⅱ)　设ξ是X的开覆盖. 称η是ξ的**收缩**，如果η是X的开覆盖且η是ξ的**精确强加细**，即$T=S$且$\forall s\in S$，$\overline{V}_s\subset U_s$.

2.3.4　引理　若空间X的开覆盖$\xi=\{U(s):s\in S\}$有局部有限开(闭)加细η，则ξ有局部有限的精确开(闭)加细.

证　$\forall V\in\eta\ \exists h(V)\in S$，$V\subset U(h(V))$. $\forall s\in S$，令

$$W(s)=\bigcup\{V\in\eta:h(V)=s\}.$$

则$\{W(s):s\in S\}$即为ξ的局部有限的精确开(闭)加细. 证毕.

2.3.5　定义　X的可数子集族$\{A_n:n<\omega\}$是**上升的**，如果$\forall n<\omega$，$A_n\subset A_{n+1}$.

2.3.6　定理　空间X是可数仿紧的当且仅当它的每个可数上升开覆有一个收缩.

证　($\rightarrow$)设$\xi=\{U_n:n<\omega\}$是可数仿紧空间X的可数上升开覆盖. $\eta=\{V_n:n<\omega\}$是ξ的局部有限精确开加细，则$V_n\subset U_n$. $\forall n<\omega$，令

$$W_n = X \setminus \overline{\bigcup\{V_i : i > n\}}.$$

$\{W_n : n<\omega\}$就是ξ的收缩.

($\Leftarrow$)设$\xi=\{U_n : n<\omega\}$是X的可数开覆盖. $\forall n<\omega$令$W_n=\bigcup_{i\leqslant n}U_i$, $\{W_n : n<\omega\}$是X的可数上升开覆盖,从而有一个收缩$\{V_n : n<\omega\}$. 于是$\overline{V}_n\subset W_n$. 令

$$G_0 = U_0, G_n = U_n \setminus \bigcup_{i<n}\overline{V}_i, n \geqslant 1.$$

$\xi'=\{G_n : n<\omega\}$是ξ的局部有限开加细,X是可数仿紧的. 证毕.

2.3.7 引理 空间X是κ-仿紧的当且仅当X是可数仿紧的且X的每个势$\leqslant\kappa$的开覆盖有σ-局部有限开加细.

证 必要性是显然的. 现证充分性. 设空间X合引理的假设且ξ是X的势$\leqslant\kappa$的开覆盖. 设$\eta=\bigcup_{n=0}^{\infty}\eta_n$是$\xi$的开加细,使得每个$\eta_n=\{V(n,s) : s\in S_n\}$是局部有限的. 因$X$是可数仿紧的,它的开覆盖$\{\bigcup\eta_n : n<\omega\}$有局部有限开加细,从而有局部有限的精确开加细$\{G_n : n<\omega\}$. 则$\forall n>\omega, G_n\subset\bigcup\eta_n$. 令

$$\varphi_n = \{G_n \cap V(n,s) : s \in S_n\}, n < \omega.$$

每个φ_n是局部有限的. 易知$\varphi=\bigcup_{n=0}^{\infty}\varphi_n$是$\xi$的局部有限开加细. X是κ-仿紧的. 证毕.

2.3.8 引理 若空间X的每个势$\leqslant\kappa$的定向(良序)开覆盖有局部有限开加细,则X的每个势$\leqslant\kappa$的定向(良序)开覆盖有局部有限的收缩.

证 设$\xi=\{U_\alpha : \alpha<\kappa\}$是$X$的定向(良序)开覆盖. 由假设,它有局部有限的精确开加细$\varphi=\{G_\alpha : \alpha<\kappa\}$,则$G_\alpha\subset U_\alpha$. $\forall\alpha<\kappa$,令

$$W_\alpha = X \setminus \bigcup\{\overline{G}_\beta : \beta < \kappa, U_\beta \not\subset U_\alpha\}.$$

W_α是开集且易知

$$\forall\alpha<\kappa, \overline{W}_\alpha\subset U_\alpha. \qquad (1)$$

$\forall x\in X$，设恰有 $\overline{G}_{\alpha_0},\cdots,\overline{G}_{\alpha_n}$ 含 x. 因 ξ 是定向(良序)的，$\exists\gamma<\kappa$，$U_{\alpha_0}\cup\cdots\cup U_{\alpha_n}\subset U_\gamma$. 则 $x\in W_\gamma$. 于是 $\zeta=\{W_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 的定向(良序)开覆盖. 由假设，ζ 有局部有限精确开加细 $\eta=\{V_\alpha,\alpha<\kappa\}$. 由(1)知，$\forall\alpha<\kappa,\overline{V}_\alpha\subset\overline{W}_\alpha\subset U_\alpha$. η 是 ξ 的局部有限收缩. 证毕.

2.3.9 引理　若空间 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的定向开覆盖有局部有限闭加细，则 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的定向开覆盖有局部有限开加细.

证　设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 的定向开覆盖. 由假设，ξ 有局部有限的精确闭加细 $\varphi=\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$，则 $F_\alpha\subset U_\alpha$. 令 $S=[\kappa]^{<\omega}$，则 $|S|=\kappa$. $\forall s\in S$，令

$$V(s)=X\setminus\bigcup\{F_\alpha:\alpha\in\kappa\setminus s\}.$$

则 $\eta=\{V(s):s\in S\}$ 是 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的定向开覆盖. 由假设，η 有局部有限精确闭加细 $\theta=\{C(s):s\in S\}$，则 $C(s)\subset V(s)$. $\forall\alpha<\kappa$，令

$$G_\alpha=X\setminus\bigcup\{C(s):s\in S,C(s)\cap F_\alpha=\varnothing\}.$$

G_α 是开集，$F_\alpha\subset G_\alpha$ 且 $\forall s\in S,\alpha<\kappa$，有

$$G_\alpha\cap C(s)\neq\varnothing\leftrightarrow F_\alpha\cap C(s)\neq\varnothing. \tag{1}$$

现证 $\varphi=\{U_\alpha\cap G_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 ξ 的局部有限开加细. 设 $x\in X$，$\exists\alpha<\kappa$，$x\in F_\alpha\subset U_\alpha\cap G_\alpha$. φ 是 ξ 的开加细. 其次，设 $x\in X$，$\exists G\in N(x)$，使得

$$(\theta)_G=\{C(s_0),\cdots,C(s_n)\},$$

其中 $\forall i\leqslant n$，$s_i\in S$. 令 $A=\{\alpha<\kappa:G\cap U_\alpha\cap G_\alpha\neq\varnothing\}$，由(1)知，$A\subset\bigcup_{i=0}^{n}s_i$. A 是有限集从而 φ 在 X 是局部有限的. 证毕.

2.3.10 引理　空间 X 是可数仿紧的当且仅当 X 的每个可数上升开覆盖有 σ-局部有限开的强加细.

证　($\rightarrow$)显然.

($\leftarrow$)设 $\xi=\{U_n:n<\omega\}$ 是空间 X 的可数开覆盖. $\forall n<\omega$，令 W_n

$=\bigcup_{i\leq n}U_i$，则 $\varphi=\{W_n : n<\omega\}$是 X 的可数上升开覆盖，从而有一个开加细 $\eta=\bigcup_{n=0}^{\infty}\eta_n$，使得每个 η_n 是局部有限的且$\{\overline{V} : V\in\eta\}$加细 φ. $\forall n<\omega$，令

$$F_n=\bigcup\{\overline{V} : V\in\bigcup_{i\leq n}\eta_i,\overline{V}\subset W_n\},$$

$$H_0=U_0,H_n=U_n\setminus F_{n-1},n\geq 1.$$

则每个 F_n 是闭集，H_n 是开集. 现证 $\zeta=\{H_n : n<\omega\}$是 ξ 的局部有限开加细，从而 X 是可数仿紧的. 事实上，设 $x\in X$，则

$$\exists n<\omega,\exists V\in\eta_n,x\in V. \tag{1}$$

于是$\exists m<\omega,\overline{V}\subset W_m$. 令 $k=\max\{m,n\}$，则

$$\overline{V}\subset W_m\subset W_k. \tag{2}$$

由(1)知，$V\in N(x)$. 由(2)易知，$\forall j>k,V\cap H_j=\varnothing$. ζ 在 X 是局部有限的. 只需再证 ζ 覆盖 X. 由(1),(2)知，$x\in\overline{V}\subset F_k$. 令 $k_0=\min\{k<\omega : x\in F_k\}$，则 $x\in F_{k_0}$，因而$\exists V_0\in\bigcup_{i\leq k_0}\eta_i$，使得 $x\in\overline{V}_0\subset W_{k_0}$. 于是$\exists i\leq k_0,x\in U_i$. 若 $i=0$，则 $x\in H_0$；若 $i>0,i-1<k_0$，从而 $x\in U_i\setminus F_{i-1}=H_i$，$\bigcup\zeta=X$. 证毕.

2.3.11 定理 (Mack[1967])对任意空间 X，下列各条等价：

(Ⅰ) X 是 κ- 仿紧的；

(Ⅱ) X 的每个势$\leq\kappa$的定向开覆盖有局部有限开加细；

(Ⅲ) X 的每个势$\leq\kappa$的定向开覆盖有局部有限的收缩；

(Ⅳ) X 的每个势$\leq\kappa$的定向开覆盖有局部有限闭加细；

(Ⅴ) X 的每个势$\leq\kappa$的良序开覆盖有局部有限开加细；

(Ⅵ) X 的每个势$\leq\kappa$的良序开覆盖有局部有限的收缩；

(Ⅶ) X 的每个势$\leq\kappa$的良序开覆盖有 σ- 局部有限开的强加细.

证 (Ⅰ)→(Ⅱ)显然. (Ⅱ)→(Ⅲ)由 2.3.8 知. (Ⅲ)→(Ⅳ)显

然.（Ⅳ）→（Ⅴ）由 2.3.9 知.（Ⅴ）→（Ⅵ）由 2.3.8 知.（Ⅵ）→（Ⅶ）显然.

（Ⅶ）→（Ⅰ）由假设（Ⅶ）及 2.3.10 知，X 是可数仿紧的. 对每个无限基数 $\lambda\leqslant\kappa$，让 $Z(\lambda)$ 表语句："X 的每个势 $\leqslant\lambda$ 的开覆盖有 σ-局部有限开加细". 现用超限归纳法来证明对每个无限基数 $\lambda\leqslant\kappa$，$Z(\lambda)$ 真. 由 2.3.7 知，X 是 λ-仿紧的，特别地，X 是 κ- 仿紧的. 事实上，当 $\lambda=\omega_0$ 时，因 X 是可数仿紧的，故 $Z(\lambda)$ 真. 现设 $\omega_0<\lambda\leqslant\kappa$，使得对每个无限基数 $\mu<\lambda$，$Z(\mu)$ 真，我们来证 $Z(\lambda)$ 真. 设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\lambda\}$ 是 X 的开覆盖. $\forall\alpha<\lambda$，令 $V_\alpha=\bigcup\limits_{\beta\leqslant\alpha}U_\beta$，则 $\eta=\{V_\alpha:\alpha<\lambda\}$ 是 X 的良序开覆盖. 由假设（Ⅶ），η 有一个开加细 $\varphi=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n$，使得每个 φ_n 是局部有限的且 $\{\overline{W}:W\in\varphi\}$ 加细 η. $\forall W\in\varphi\exists\alpha(W)<\lambda$，$\overline{W}\subset V_{\alpha(W)}=\bigcup\{U_\beta:\beta\leqslant\alpha(W)\}$. 于是

$$\theta(W)=\{U_\beta:\beta\leqslant\alpha(W)\}\cup\{X\backslash\overline{W}\}$$

是 X 的开覆盖. 因 $|\theta(W)|<\lambda$，由归纳法假设，$\theta(W)$ 有开加细 $\zeta(W)=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\zeta_n(W)$，每个 $\zeta_n(W)$ 是局部有限的. 令

$$\zeta_n'(W)=\{H\in\zeta_n(W):H\cap\overline{W}\neq\varnothing\},$$

$$\zeta'(W)=\bigcup_{n=0}^{\infty}\zeta_n'(W).$$

$\forall m,n<\omega$，令

$$\gamma_{mn}=\{H\cap W:H\in\zeta_m'(W),W\in\varphi_n\}.$$

现证

$$\forall m,n<\omega,\gamma_{mn}\text{是局部有限开集族.}\tag{1}$$

事实上，设 $x\in X$，$\exists O\in N(x)$，使得

$$(\varphi_n)_O=\{W_{s_0},\cdots,W_{s_k}\}.$$

$\forall i\leqslant k\exists O_i\in N(x)$，使得 $(\zeta'_m(W_{s_i}))_{O_i}$ 有限，则 $O'=O\cap\bigcap\limits_{i=0}^{k}O_i\in N(x)$. 令

$$\delta = \{G \in \gamma_{mn} : O' \cap G \neq \varnothing\}.$$

则 $\delta \subset \{H \cap W_{x_i} : H \in (\xi'_n(W_{x_i}))_{O_{x_i}}, i = 0, \cdots, k\}$. 于是 δ 是有限的，从而(1)真.

易知 $\gamma = \bigcup_{m,n=0}^{\infty} \gamma_{mn}$ 是 ξ 的开加细. 由(1)知，它是 σ-局部有限的. $Z(\lambda)$真. 归纳法完成. 证毕.

2.3.12 系 对任意空间 X，下列各条等价：

(Ⅰ) X 是仿紧的；

(Ⅱ) X 是可数仿紧的且 X 的每个开覆盖有 σ-局部有限开加细；

(Ⅲ) X 的每个定向开覆盖有局部有限开加细；

(Ⅳ) X 的每个定向开覆盖有局部有限的收缩；

(Ⅴ) X 的每个定向开覆盖有局部有限闭加细；

(Ⅵ) X 的每个良序开覆盖有局部有限开加细；

(Ⅶ) X 的每个良序开覆盖有局部有限的收缩；

(Ⅷ) X 的每个良序开覆盖有 σ- 局部有限开的强加细.

这是在不附任何分离公理的情况下得到的仿紧性的一组刻画. 沿这一研究方向，在下面的定理 2.3.16 及第四章中，我们将介绍仿紧性的另一些更弱形式的刻画.

2.3.13 定义 设 ξ, η 是空间 X 的覆盖.

(Ⅰ) ξ 是**半开的**，如果 $\forall x \in X, x \in (\mathrm{St}(x, \xi))^{\circ}$.

(Ⅱ) η 是 ξ 的 **F- 加细**，如果 η 是 ξ^F 的加细.

2.3.14 例 (Ⅰ) 空间 X 的开覆盖是半开的.

(Ⅱ) 空间 X 的闭包保持闭覆盖 φ 是半开的.

证 (Ⅱ)设 $x \in X$，则 $W = X \setminus \bigcup(\varphi \setminus (\varphi)_x) \in N(x)$ 且 $W \subset \mathrm{St}(x, \varphi)$，故 $x \in (\mathrm{St}(x, \varphi))^{\circ}$. 证毕.

2.3.15 引理 设 ξ 是空间 X 的局部有限的半开覆盖，则 ξ 有

一个局部有限闭的 F- 加细.

证　记 $S=[\xi]^{<\omega}\setminus\{\varnothing\}$. $\forall s\in S$，令

$$F(s)=\overline{\bigcap s}\cap\overline{(X\setminus\bigcup(\xi\setminus s))}.$$

现证 $\varphi=\{F(s): s\in S\}$ 是 ξ 的局部有限闭的 F－加细. 首先，设 $x\in X$，则 $(\xi)_x\in S$ 且 $x\in F((\xi)_x)$. 于是 φ 是 X 的闭覆盖. 其次，φ 是局部有限的. 事实上，$\forall x\in X$，令 $\xi_x=\{A\in\xi: x\in\overline{A}\}$，则 $\xi_x\in S$. 因 $x\notin\bigcup\{\overline{A}: A\in\xi\setminus\xi_x\}=\overline{\bigcup(\xi\setminus\xi_x)}$，$W=X\setminus\overline{\bigcup(\xi\setminus\xi_x)}\in N(x)$. 易知 $(\varphi)_W$ 有限. 最后，$\forall s\in S$，$\forall x\in F(s)\subset\overline{X\setminus\bigcup(\xi\setminus s)}$，$\exists y\in \mathrm{St}(x,\xi)\cap(X\setminus\bigcup(\xi\setminus s))$. 设 $A\in\xi$ 使得 $x,y\in A$，则 $x\in A\in s$，$x\in\bigcup s$. 故 $F(s)\subset\bigcup s\in\xi^F$. φ 是 ξ 的 F- 加细. 证毕.

2.3.16　定理　(Junnila[1979])空间 X 是仿紧的当且仅当它的每个良序开覆盖有局部有限的半开加细.

证　($\rightarrow$)显然.

($\leftarrow$)设空间 X 的每个良序开覆盖有局部有限的半开 加细. 先证

论断 1　X 的每个开覆盖有局部有限闭的 F-加细.

证　设 κ 是基数，让 $Z(\kappa)$ 表命题："若 ξ 是 X 的开覆盖使得 $|\xi|\leqslant\kappa$，则 ξ 有局部有限闭的 F- 加细."这样，对论断 1 只需证对每个 κ，$Z(\kappa)$ 真. 当 $\kappa=n<\omega$ 时，设 $X=U_0\cup\cdots\cup U_{n-1}$，则 $\{X\}$ 就是 $\{U_0,\cdots,U_{n-1}\}$ 的局部有限闭的 F- 加细. 现设 $\kappa\geqslant\omega$，使得 $\forall\lambda<\kappa$，$Z(\lambda)$ 真. 现证 $Z(\kappa)$ 真. 设 $\xi=\{U_\alpha: \alpha<\kappa\}$ 是 X 的开覆盖. $\forall\alpha<\kappa$，令 $V_\alpha=\bigcup\limits_{\beta\leqslant\alpha}U_\beta$，则 $\eta=\{V_\alpha: \alpha<\kappa\}$ 是 X 的良序开覆盖. 由定理假设，η 有一个局部有限的半开加细. 据 2.3.15，η 有局部有限闭的 F- 加细 φ. 因 η 是良序的，φ 是 η 的加细. $\forall F\in\varphi$ $\exists\alpha(F)<\kappa$，使得 $F\subset V_{\alpha(F)}=\bigcup\{U_\beta: \beta\leqslant\alpha(F)\}$，则 $\theta(F)=\{U_\beta: \beta\leqslant\alpha(F)\}\cup\{X\setminus F\}$ 是 X 的开覆盖且 $\lambda=|\theta(F)|<\kappa$. 由归纳法假设 $Z(\lambda)$ 真，故 $\theta(F)$ 有局部有限闭的 F-加细

$\zeta(F)$. $\zeta(F)|F$ 是子空间 F 的局部有限闭覆盖，又 φ 是 X 的局部有限闭覆盖，则 $\zeta=\bigcup\{\zeta(F)|F: F\in\varphi\}$ 是 X 的局部有限闭覆盖. 易知 ζ 是 ξ 的 f- 加细. $Z(\kappa)$真. 论断 1 证毕.

设 γ 是 X 的定向开覆盖. 据论断 1，γ 有局部有限闭的 F-加细 φ. 因 γ 是定向的，φ 是 γ 的局部有限闭加细. 据 2.3.12，X 是仿紧的. 证毕.

2.3.17 定理(高[1980]) 设 $f: X\to Y$ 是完备满映射且 Y 是 κ- 仿紧的，则 X 是 κ- 仿紧的.

证 设 $\xi=\{U_\alpha: \alpha<\kappa\}$ 是 X 的开覆盖. 令 $S=[\kappa]^{<\omega}\setminus\{\varnothing\}$. $\forall s\in S$，令

$$E_s=\{y\in Y: f^{-1}[y]\subset\bigcup_{\alpha<s}U_\alpha\}.$$

则 $f^{-1}[E_s]\subset\bigcup_{\alpha\in s}U_\alpha$. 因 f 是闭映射，Y 有开集 V_s，使得 $f^{-1}[V_s]\subset\bigcup_{\alpha\in s}U_\alpha$ 且 $V_s\supset E_s$. $\{V_s: s\in S\}$ 是 Y 的开覆盖且 $|S|\leqslant\kappa$，它有一个局部有限的精确开加细 $\{W_s: s\in S\}$. 易知

$$\eta=\{f^{-1}[W_s]\cap U_\alpha: \alpha\in s, s\in S\}$$

是 ξ 的局部有限开加细，X 是 κ- 仿紧的. 证毕.

2.3.18 系 (Morita[1962]) 设 X 是紧空间，Y 是 κ- 仿紧空间，则 $X\times Y$ 是 κ- 仿紧空间.

我们在(Jiang[1987a])中引入局部 θ-加细序列的概念并用以刻画了仿紧性(见第四章). 下一定理表明也可以用它来刻画可数仿紧性.

2.3.19 定义 设 ξ，$\eta_n(n<\omega)$ 是 X 的覆盖. 称 $\langle\eta_n\rangle_{n<\omega}$ 是 ξ 的**局部 θ-加细序列**，如果每个 $\eta_n(n<\omega)$ 是 ξ 的加细且 $\forall x\in X$ $\exists n(x)<\omega$，使得 $\eta_{n(x)}$ 在 x 是局部有限的.

2.3.20 定理 空间 X 是可数仿紧的当且仅当它的每个可数上升开覆盖有开的局部 θ- 加细序列.

证　($\rightarrow$)显然.

($\leftarrow$)设 $\xi=\{U_n: n<\omega\}$ 是空间 X 的可数上升开覆盖且 $\langle\eta_n\rangle_{n<\omega}$ 是 ξ 的开的局部 0-加细序列. $\forall n,i<\omega$, 令

$$W_{ni}=\{x\in X: \mathrm{St}(x,\eta_n)\subset U_i\}.$$

则 $\overline{W_{ni}}=W_{ni}\subset U_i$. $\forall i<\omega$, 令 $F_i=\bigcup\limits_{n=0}^{i}W_{ni}$, 则 F_i 是闭集. 现证 $\varphi=\{(F_n)^\circ: n<\omega\}$ 是 ξ 的收缩, 由此据 2.3.6 知, X 是可数仿紧的. 事实上, $\forall n<\omega$, $\overline{F_n^\circ}\subset F_n=\bigcup\limits_{j=0}^{n}W_{jn}\subset U_n$. 只需再证 φ 是 X 的开覆盖. 设 $x\in$, $\exists n<\omega$ $\exists G\in N(x)$, 使得 $(\eta_n)_G=\{V_0,\cdots,V_k\}$. $\forall j\leqslant k\exists U_{i_j}\in\xi, V_j\subset U_{i_j}$. 令 $m=\max\{n,i_0,\cdots,i_k\}$, 则 $x\in F_m^\circ$. $\bigcup\varphi=X$. 证毕.

2.3.21　定义　X 的子集族 $\xi=\{A_s: s\in S\}$ 在点 $x\in X$ 是点有限的, 如果 $\{s\in S: x\in A_s\}$ 是有限的. ξ 在 X 内是点有限的如果 ξ 在一点 $x\in X$ 是点有限的.

2.3.22　定理　正规空间的每个点有限开覆盖有一个收缩.

证　设 ξ 是正规空间 X 的点有限开覆盖. 将 ξ 良序化, 不妨设 $\xi=\{U_\alpha: \alpha<\tau\}$, τ 是序数. 先证

论断 1　$\forall\alpha<\tau$, 存在开集 V_α, 使得

$$X\setminus\bigcup\zeta_\alpha\subset V_\alpha\subset\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha,$$

此处 $\zeta_\alpha=\{V_\beta: \beta<\alpha\}\cup\{U_\beta: \beta>\alpha\}$.

证　对 $\alpha<\tau$ 用超限归纳法. 令 $\zeta_0=\{U_\beta: \beta>0\}$, 则 $X\setminus\bigcup\zeta_0\subset U_0$. 于是存在开集 V_0, 使得

$$X\setminus\bigcup\zeta_0\subset V_0\subset\overline{V}_0\subset U_0.$$

现设 $\alpha<\tau$, 使得 $\forall\gamma<\alpha$ 存在开集 V_γ, 有

$$X\setminus\bigcup\zeta_\gamma\subset V_\gamma\subset\overline{V}_\gamma\subset U_\gamma.$$

令 $\zeta_\alpha=\{V_\beta: \beta<\alpha\}\cup\{U_\beta: \beta>\alpha\}$. 下证

$$\xi'=\{U_\alpha\}\cup\zeta_\alpha \text{ 是 } X \text{ 的开覆盖}. \tag{1}$$

事实上, 设 $x\in X$, 或者 $x\in\bigcup\limits_{\beta\geqslant\alpha}U_\beta\subset\bigcup\xi'$, 或者 $x\notin\bigcup\limits_{\beta\geqslant\alpha}U_\beta$. 令 $\sigma=\max\{\gamma$

$<\tau : x\in U_\gamma\}$，则 $x\in U_\sigma$，且 $\sigma<\alpha$. 于是 $x\notin\bigcup_{\beta>\sigma}U_\beta$. 若 $x\in\bigcup_{\beta<\sigma}V_\beta$，则 $x\in\bigcup\zeta_\alpha\subset\bigcup\xi'$，若 $x\notin\bigcup_{\beta<\sigma}V_\beta$，则 $x\in X\setminus\bigcup\zeta_\sigma\subset V_\sigma\subset\bigcup\xi'$. (1)真. 由(1)知 $X\setminus\bigcup\zeta_\alpha\subset U_\alpha$. 于是存在开集 V_α，使得

$$X\setminus\bigcup\zeta_\alpha\subset V_\alpha\subset\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha.$$

论断 1 证毕.

令 $\eta=\{V_\alpha : \alpha<\tau\}$，与(1)同理，可证 η 是 X 的开覆盖. 由论断 1 知，η 是 ξ 的收缩. 证毕.

2.3.23 系 对任意空间 X，下列各条等价：

(Ⅰ) X 是正规的；

(Ⅱ) X 的每个点有限开覆盖有精确闭加细；

(Ⅲ) X 的每个局部有限开覆盖有精确闭加细；

(Ⅳ) X 的每个势大于 1 的有限开覆盖有精确闭加细；

(Ⅴ) X 的每个二元开覆盖有精确闭加细.

2.3.24 定理 对任意空间 X，下列各条等价：

(Ⅰ) X 是正规可数仿紧的；

(Ⅱ) X 的每个可数开覆盖有局部有限的收缩；

(Ⅲ) X 的每个可数开覆盖有精确闭加细.

证 (Ⅰ)→(Ⅱ)设 $\xi=\{U_n : n<\omega\}$是正规可数仿紧空间 X 的可数开覆盖，则 ξ 有一个局部有限精确开加细 $\varphi=\{W_n : n<\omega\}$. 据 2.3.22，$\varphi$ 有收缩 $\eta=\{V_n : n<\omega\}$. 故 η 是 ξ 的局部有限收缩.

(Ⅱ)→(Ⅲ)显然.

(Ⅲ)→(Ⅰ)由假设(Ⅲ)，显然 X 是正规的. 设 $\xi=\{U_n : n<\omega\}$ 是 X 的可数上升开覆盖. 由假设(Ⅲ)，ξ 有精确闭加细 $\{F_n : n<\omega\}$，则 $F_n\subset U_n$. 于是存在开集 V_n，使得 $F_n\subset V_n\subset\overline{V}_n\subset U_n$，$\eta=\{V_n : n<\omega\}$是 ξ 的收缩. 据 2.3.6，X 是可数仿紧的. 证毕.

2.3.25 定义 空间 X 是**可数亚紧的**，如果 X 的每个开覆盖有

点有限的开加细.

显然可数仿紧空间是可数亚紧的.

2.3.26　系　正规可数亚紧空间是可数仿紧的.

证　设 $\xi=\{U_n: n<\omega\}$ 是正规可数亚紧空间 X 的可数开覆盖，则 ξ 有点有限的开加细 η. 不妨设 $\eta=\{V_n: n<\omega\}$ 是 ξ 的精确开加细. 由 2.3.22 知，η 有一个收缩 $\varphi=\{W_n: n<\omega\}$，则 $\{\overline{W_n}: n<\omega\}$ 是 ξ 的精确闭加细. 由 2.3.24 知，X 是可数仿紧的. 证毕.

2.3.27　引理　完全正规空间是可数仿紧的.

证　设 $\xi=\{U_n: n<\omega\}$ 是完全正规空间 X 的可数上升开覆盖. $\forall n<\omega$，设 $U_n=\bigcup_{i=0}^{\infty}C_{ni}$，其中每个 C_{ni} 闭于 X. 不妨设 $C_{ni}\subset C_{n,i+1}$. 令 $F_n=\bigcup_{j=0}^{n}C_{jn}$. $\forall n<\omega\forall j\leqslant n$，$C_{jn}\subset U_j\subset U_n$，故 $F_n\subset U_n$. 设 V_n 开于 X，使得 $F_n\subset V_n\subset\overline{V}_n\subset U_n$. 易知 $\{F_n: n<\omega\}$ 覆盖 X，从而 $\{V_n: n<\omega\}$ 是 ξ 的收缩. X 是可数仿紧的. 证毕.

Dowker 在[1951]中，给出上面结果后提出问题：是否存在 T_2 正规的非可数仿紧空间？经过点集拓扑学家们 20 年的研究，这个问题最后被 M. E. Rudin 所解决. 她在 Rudin[1971]中，构造了一个 T_2 集体正规非可数仿紧空间的例子.

2.3.28　定义　空间 X 是**可遮的**，如果 X 的每个开覆盖有 σ-互不相交的开加细.

2.3.29　定理　(Nagami[1955])正规可遮的可数仿紧空间是仿紧的.

证　设 ξ 是正规可遮的可数仿紧空间 X 的开覆盖，$\eta=\bigcup_{n=0}^{\infty}\eta_n$ 是 ξ 的开加细，其中每个 η_n 是互不相交的. 据 2.3.24，X 的可数开覆盖 $\{\bigcup\eta_n: n<\omega\}$ 有局部有限的收缩 $\{W_n: n<\omega\}$. 令

$$\varphi_n=\{W_n\cap V: V\in\eta_n\},$$

则 φ_n 是离散开集族，使得 $\bigcup\varphi_n=W_n$. 于是 $\varphi=\bigcup_{n=0}^{\infty}\varphi_n$ 是 ξ 的局部有限开加细. X 是仿紧的. 证毕.

§2.4　强仿紧空间

强仿紧空间是仿紧空间类的重要子类，它在一般空间的维数论中有应用. 本节主要介绍在正则空间范围内强仿紧空间的基本刻画.

2.4.1　定义　（Ⅰ）　X 的子集族 ξ 是**星形有限**(**星形可数**)**的**，如果 ξ 的每个元至多与 ξ 的有限(可数)多个元相交.

（Ⅱ）　设基数 $\kappa\geqslant\omega$. 空间 X 称为 κ- **强仿紧的**，如果 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖有星形有限开加细.

ω- 强仿紧空间又叫**可数强仿紧空间**.

（Ⅲ）　空间 X 是**强仿紧的**，如果 $\forall\kappa\geqslant\omega$，$X$ 是 κ- 强仿紧的.

星形有限子集族显然不必是局部有限的，但空间的任何星形有限开覆盖是局部有限的. 于是 κ- 强仿紧空间是 κ- 仿紧的. 后面的 2.4.6 例表明反之不真.

2.4.2　定义　设 ξ 是 X 的子集族.

（Ⅰ）　设 $A,B\in\xi$. 由 ξ 的元组成的有限序列 $A_0,A_1\cdots,A_{n-1}$ 称为 ξ 内从 A 到 B 的一条**链**，如果 $A_0=A,A_{n-1}=B$ 且 $\forall i=0,1,\cdots,n-2$，$A_i\cap A_{i+1}\neq\varnothing$. 这个链记为 $\langle A=A_0,\cdots,A_{n-1}=B\rangle$.

（Ⅱ）　ξ 是**连通的**，如果 $\forall A,B\in\xi$，ξ 内有一条从 A 到 B 的链.

（Ⅲ）　令 $D(\xi)=\{\eta\subset\xi:\eta$ 是连通的$\}$. 则 $\varnothing\in D(\xi)$. 偏序集 $\langle D(\xi),\subset\rangle$ 的每个极大元叫 ξ 的一个**连通分支**.

集 X 的覆盖 ξ 称为 X 的一个**划分**，如果 ξ 是由不空子集组成

的互不相交族.

2.4.3 引理　设 ξ 是 X 的不空子集族.

（Ⅰ）　ξ 的每个连通子族包含在 ξ 的某个连通分支内.

（Ⅱ）　ξ 的每个连通分支不空且不含空集.

（Ⅲ）　若 ζ,η 是 ξ 的不同的连通分支，则

$$(\bigcup\zeta)\cap(\bigcup\eta)=\varnothing.$$

（Ⅳ）　ξ 的一切连通分支的族是 ξ 的一个划分.

证　（Ⅰ）由 Zorn 引理知.（Ⅱ）显然.（Ⅳ）由（Ⅰ）及（Ⅲ）知.

（Ⅲ）若 $\exists\ x\in(\bigcup\zeta)\cap(\bigcup\eta)$，设 $B\in\zeta,C\in\eta$，使得 $x\in B\cap C$. $\forall\ D,E\in\zeta\cup\eta$，若 $D,E\in\zeta$（或 η），则 $\zeta\cup\eta$ 内有从 D 到 E 的链. 若 $D\in\zeta,E\in\eta,\zeta$ 内有从 D 到 B 的链

$$\langle D=D_0,\cdots,D_{m-1}=B\rangle,$$

η 内有从 C 到 E 的链

$$\langle C=C_0,\cdots,C_{n-1}=E\rangle,$$

则 $\zeta\cup\eta$ 内有从 D 到 E 的链

$$\langle D=D_0,\cdots,D_{m-1}=B,D_m=C_0=C,\cdots,D_{m+n-1}=C_{n-1}=E\rangle.$$

于是 $\zeta\cup\eta$ 是连通的. $\zeta=\zeta\cup\eta=\eta$，矛盾. 证毕.

2.4.4 引理　设 ξ 是 X 内星形可数的连通子集族，则 ξ 是可数的.

证　任取 $E\in\xi$. $\forall\ n\in N$，令

$$S_n=\{A\in\xi:\xi \text{ 内有从 } E \text{ 到 } A \text{ 的链} \langle A_0=E,\cdots,A_n=A\rangle\}.$$

因 ξ 是星形可数的，由归纳法可知，每个 S_n 可数. 则 $\xi=\bigcup\limits_{n<\omega}S_n$ 可数. 证毕.

2.4.5 引理　强仿紧的连通空间是 Lindelöf 的.

证　设 ξ 是强仿紧连通空间 X 的开覆盖. 不妨设 $X\neq\varnothing$. 设 η 是 ξ 的星形有限开加细. 只需证 η 可数. 事实上，$\eta\neq\varnothing$. 设 $\{\eta_s:s\in$

$S\}$是 η 的一切连通分支的族. $\forall\ s\in S$,令 $E_s=\bigcup\eta_s$. 据 2.4.3,$\{E_s:s\in S\}$是 X 的互不相交开覆盖,从而每个E_s 是 X 的开且闭的不空子集. 任取$s_0\in S$,因 X 连通,$E_{s_0}=X$. 则 $S=\{s_0\}$. 于是 $\eta=\eta_{s_0}$是连通的星形可数族. 据 2.4.4,η 是可数的. 证毕.

2.4.6 例 存在度量空间(从而是仿紧的)但非强仿紧空间.

证 设基数 $\kappa>\omega$. $\forall\ \alpha<\kappa$,令$I_\alpha=I\times\{\alpha\}$,$I=[0,1]\subset R$. 在$\bigcup\limits_{\alpha<\kappa}I_\alpha$ 上定义等价关系 E 如下:

$$\langle x,\alpha\rangle E\langle y,\beta\rangle\leftrightarrow(x=y=0)\vee(x=y\wedge\alpha=\beta)$$

在商集 $X=(\bigcup\limits_{\alpha<\kappa}I_\alpha)/E$ 上定义一个度量 ρ 如下:

$$\rho(E[\langle x,\alpha\rangle],E[\langle y,\beta\rangle])=\begin{cases}|x-y|, & \text{当 } \alpha=\beta,\\ x+y, & \text{当 } \alpha\neq\beta.\end{cases}$$

则度量空间 $J(\kappa)=\langle X,\rho\rangle$叫具有 κ 条刺的**刺猬空间**. 为了证明$J(\kappa)$不是强仿紧的,据2.4.5,只需证它是连通的非 Lindelöf 空间,等价地,非第二可数空间.

事实上,$\forall\ \alpha<\kappa$,令$A_\alpha=\{E[\langle x,\alpha\rangle]:x\in I\}$,它作为 $J(\kappa)$的子空间与数直线的连通子空间 I 同胚,从而A_α 是连通的. $\forall\ \alpha,\beta<\kappa$,$E[\langle 0,\alpha\rangle]\in A_\alpha\cap A_\beta$. 据蒲保明等[1985]8.1.7,$J(\kappa)=\bigcup\limits_{\alpha<\kappa}A_\alpha$ 是连通的. 其次,设 β 是 $J(\kappa)$的任一基. $\forall\ \alpha<\kappa$,$G_\alpha=\{E[\langle x,\alpha\rangle]:x\in(1/2,1]\}$是 $E[\langle 1,\alpha\rangle]$的邻域,从而 $\exists\ B_\alpha\in\beta$,$E[\langle 1,\alpha\rangle]\in B_\alpha\subset G_\alpha$. 则 $\alpha\neq\beta$ 时,$B_\alpha\cap B_\beta=\varnothing$,$|\beta|\geqslant\kappa>\omega$. $J(\kappa)$没有可数基. 证毕.

2.4.7 引理 空间 X 的每个星形可数开覆盖 η 是 σ- 离散的.

证 设$\{\eta_s:s\in S\}$是 η 的一切连通分支的族,则 $\eta=\bigcup\limits_{s\in S}\eta_s$. 据 2.4.4,每个$\eta_s$ 是可数的. 设$\eta_s=\{V(s,n):n<\omega\}$. $\forall\ n<\omega$,由2.4.3知,$\eta_n{}^*=\{V(s,n):s\in S\}$是离散的,从而 $\eta=\bigcup\limits_{n<\omega}\eta_n{}^*$是 σ- 离散的. 证毕.

2.4.8 引理 若空间 X 的开覆盖 ξ 有一个星形可数且闭包保持的闭加细 φ，则 ξ 有星形可数的开加细.

证 设 $\{\varphi_s : s\in S\}$ 是 φ 的一切连通分支的族，则 $\varphi=\bigcup_{s\in S}\varphi_s$. $\forall s\in S$，$C_s=\bigcup\varphi_s$ 是闭集. $\bigcup_{s\in S}C_s=\bigcup\varphi=X$ 且 $s\neq t$ 时 $C_s\cap C_t=\varnothing$. 于是每个 C_s 是开且闭集. 每个 φ_s 是连通的星形可数族，据2.4.4，它是可数的. 设 $\varphi_s=\{F_{sn} : n<\omega\}$. $\forall s\in S, n<\omega$，$\exists U_{sn}\in\xi$，使得 $F_{sn}\subset U_{sn}$. 令

$$\zeta=\{C_s\cap U_{sn} : s\in S, n<\omega\}.$$

易知 ζ 是 ξ 的星形可数开加细. 证毕.

2.4.9 引理 若空间 X 的可数开覆盖 $\xi=\{U(n) : n<\omega\}$ 有可数的星形有限函数开加细 η，则 ξ 有星形有限函数开的精确加细.

证 $\forall V\in\eta\ \exists h(V)<\omega$，使得 $V\subset U(h(V))$. $\forall n<\omega$，令

$$W_n=\bigcup\{V\in\eta : h(V)=n\},$$

则 $\tau=\{W_n : n<\omega\}$ 就是 ξ 的星形有限函数开的精确加细. 证毕.

2.4.10 引理 设 $\xi=\{U_n : n<\omega\}$ 是空间 X 的可数的函数开覆盖，则 ξ 有一个星形有限函数开的精确加细.

证 据2.4.9，只需证 ξ 有一个可数的星形有限函数开加细. $\forall n<\omega$，设 $U_n=f_n^{-1}[(0,1]]$，此处 $f_n : X\to I$ 连续. 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)/2^{n+1},\ x\in X.$$

则 $f : X\to I$ 连续. $\forall n<\omega$，令

$$V_n=f^{-1}\left[\left(\frac{1}{n+1},1\right]\right], F_n=f^{-1}\left[\left[\frac{1}{n+1},1\right]\right].$$

则 $\{V_n : n<\omega\}$ 是 X 的函数开覆盖且 $V_n\subset F_n\subset\bigcup_{k=0}^{n}U_k$. 令

$$W_{00}=U_0\cap V_1,\ W_{01}=U_1\cap V_1,$$

$$W_{nk}=U_k\cap(V_{n+1}\setminus F_{n-1}),\ n\geqslant 1, k=0,\cdots,n.$$

则 $\eta=\{W_{nk}:n<\omega,k=0,\cdots,n\}$是$\xi$的可数的函数开加细.

其次,对任意固定的 $n<\omega$ 及 $k\leqslant n$, $\forall\ m\geqslant n+2$, $\forall\ j\leqslant m$, $W_{nk}\subset V_{n+1}\subset F_{n+1}\subset F_{m-1}$,从而

$$W_{nk}\cap W_{mj}\subset F_{m-1}\cap(X\setminus F_{m-1})=\varnothing.$$

η是星形有限的.证毕.

2.4.11 引理 设 X 是正规空间,则下列各条等价:

(Ⅰ) X 是可数强仿紧的;

(Ⅱ) X 是可数仿紧的;

(Ⅲ) X 是可数亚紧的.

证 (Ⅰ)→(Ⅱ)和(Ⅱ)→(Ⅲ)显然.

(Ⅲ)→(Ⅰ)设$\xi=\{U_n:n<\omega\}$是正规空间 X 的可数开覆盖,则ξ有一个点有限的精确开加细$\eta=\{V_n:n<\omega\}$.因η有一个收缩,不妨设$\overline{V}_n\subset U_n$, $\forall\ n<\omega$.设$f_n:X\to I$连续,使得

$$f_n[\overline{V}_n]\subset\{1\},f_n[X\setminus U_n]\subset\{0\},n<\omega.$$

令$H_n=f_n^{-1}[(0,1]]$,则$\overline{V}_n\subset H_n\subset U_n$.$\{H_n:n<\omega\}$是 X 的可数的函数开覆盖.据2.4.10,它有一个星形有限函数开的精确加细φ.则φ是ξ的星形有限开加细.X 是可数强仿紧的.证毕.

2.4.12 定理 设 X 是正则空间,则下列各条等价:

(Ⅰ) X 是强仿紧的;

(Ⅱ) X 的每个开覆盖有局部有限且星形有限的闭加细;

(Ⅲ) X 的每个开覆盖有闭包保持且星形可数的闭加细;

(Ⅳ) X 的每个开覆盖有星形可数的开加细.

证 (Ⅰ)→(Ⅱ)设ξ是正则强仿紧空间 X 的开覆盖,则ξ有一个星形有限开加细η.因 X 是正规的,据2.3.22,η有一个收缩φ,则$\varphi'=\{\overline{W}:W\in\varphi\}$是$\xi$的星形有限闭加细.因$\varphi$是 X 的星形有限开覆盖,φ'也是局部有限的.

(Ⅱ)→(Ⅲ)显然.

(Ⅲ)→(Ⅳ)由2.4.8知.

(Ⅳ)→(Ⅰ)首先,若正则空间 X 满足条件(Ⅳ),据2.4.7,X 的每个开覆盖有 σ- 离散开加细. 于是 X 是正则仿紧的,从而是正规的. 现设 ξ 是 X 的任一开覆盖. 由假设(Ⅳ),ξ 有星形可数开加细 η. 设 $\{\eta_s: s\in S\}$ 是 η 的一切连通分支的族,则 $\eta=\bigcup_{s\in S}\eta_s$. 每个 η_s 是可数的,设 $\eta_s=\{V_{sn}: n<\omega\}$. 每个 $C_s=\bigcup\eta_s$ 是开且闭集且是正规可数仿紧子空间. 据2.3.24,C_s 的可数开覆盖 η_s 有 精确闭加细 $\{F_{sn}: n<\omega\}$,则 $F_{sn}\subset V_{sn}$. 于是有映射 $f_{sn}: X\to I$,使得

$$f_{sn}[X\setminus V_{sn}]\subset\{0\},\ f_{sn}[F_{sn}]\subset\{1\}.$$

令 $U_{sn}=f_{sn}^{-1}[(0,1]]$,则 $U_{sn}\subset V_{sn}$. 因 $U_{sn}\cap C_s=(f_{sn}|C_s)^{-1}[(0,1]]$,$\xi_s=\{U_{sn}\cap C_s: n<\omega\}$ 是 C_s 的可数的函数开覆盖. 据2.4.10,ξ_s 有一个星形有限的开的精确加细 $\varphi_s=\{G_{sn}: n<\omega\}$,则 $G_{sn}\subset U_{sn}\cap C_s$. 易知 $\varphi=\bigcup_{s\in S}\varphi_s$ 是 ξ 的星形有限开加细,X 是强仿紧的. 证毕.

2.4.13　系　正则 Lindelöf 空间是强仿紧的.

[习　题]

2.A　设 ξ 是空间 X 的子集族,试证以下几条等价:

(Ⅰ)　ξ 是离散的;

(Ⅱ)　ξ 是局部有限的且 $\forall\ A,B\in\xi$,若 $A\neq B$,则 $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$;

(Ⅲ)　ξ 是闭包保持的且 $\forall\ A,B\in\xi$,若 $A\neq B$,则 $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$.

2.B　设 φ 是空间 X 内的闭包保持闭集族. $\forall\ s\in S$,$\varphi_s\subset\varphi$,令

$$\xi=\{\bigcup\varphi_s: s\in S\},\ \eta=\{\bigcap\varphi_s: s\in S\}.$$

试证:ξ,η 皆是 X 内的闭包保持闭集族.

2.C　设 $\{F_s: s\in S\}$ 是空间 X 的局部有限闭覆盖. $\forall\ s\in S$,令

$F'_s=\{s\}\times F_s$ 且赋予积拓扑. $X'=\sum_{s\in S}F_s'$ 表和空间(见蒲保明等[1985]第三章第三节). 令 $f_s(s,x)=x$, 则 $f_s: F_s'\to X$. 试证:组合函数 $f=\nabla_{s\in S}f_s: X'\to X$ 是闭的满映射,使得 $\forall\ x\in X$, $f^{-1}[x]$ 是有限集.

2.*D* 设 ξ 是空间 X 内的局部有限子集族且 $f: X\to Y$ 是完备满映射. 试证: $\{f[A]: A\in\xi\}$ 是空间 Y 内局部有限子集族.

2.*E* 让 $\Delta(X)=\mathrm{id}_X$ 表 $X\times X$ 的对角线. 空间 X 的覆盖 ξ 称为**均匀的**,如果 $\Delta(X)$ 在积空间 $X\times X$ 内有一个邻域 V 使得 $\{V[x]: x\in X\}$ 是 ξ 的加细. 试证:(Ⅰ)设空间 X 的每个开覆盖是均匀的,则对于 $\Delta(X)$ 的每个邻域 W, $\Delta(X)$ 有一个邻域 V, 使得 $V=V^{-1}$ 且复合关系 $V\circ V\subset W$.

(Ⅱ)空间 X 是完满正规的当且仅当它的每个开覆盖是均匀的.

2.*F* **定义** (Ⅰ) 设 $A\subset X$. 称空间 X 的子集族 ξ **相对于 A 是离散(局部有限)的**,如果 $\forall\ x\in A$, 存在 X 的开集 G, 使得 $x\in G$ 且 G 至多与 ξ 内一个(有限多个)元相交.

(Ⅱ) 空间 X 的子集族 ξ 是 **σ-相对离散(σ-相对局部有限)的**,如果 $\xi=\bigcup_{n=0}^{\infty}\xi_n$, 使得 $\forall\ n<\omega$, ξ_n 相对于集 $X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\xi_i)$ 是离散(局部有限)的. 称 ξ 是 **σ-相对闭包保持的**,如果 $\forall\ n<\omega\ \forall\ \zeta\subset\xi_n$, $\overline{(\bigcup\zeta)}\cap(X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\xi_i))\subset\bigcup\{\overline{W}: W\in\zeta\}$.

(Ⅲ) 设 $\xi=\bigcup_{n=0}^{\infty}\xi_n$ 与 η 是空间 X 的二覆盖. 称 ξ 是 η 的 **σ-相对垫状加细**,如果 $\forall\ n<\omega$, $\exists\ f_n: \xi_n\to\eta$, 使得 $\forall\ \zeta\subset\xi_n$, $\overline{(\bigcup\zeta)}\cap(X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\xi_i))\subset\bigcup\{f_n(W): W\in\zeta\}$.

试证(Jiang[1986]):设 X 是正则空间,则下列各条等价:

(Ⅰ) X 是仿紧;

(Ⅱ) X 的每个开覆盖有 σ-相对离散开加细;

（Ⅲ）　X 的每个开覆盖有 σ- 相对局部有限开加细.

（Ⅳ）　X 的每个开覆盖有 σ- 相对闭包保持开加细；

（Ⅴ）　X 的每个开覆盖有 σ- 相对垫状开加细.

2.G　试证：ω_1不是ω_1- 仿紧的. 此处序数ω_1上赋予序拓扑.

2.H　(Mack[1967])试证：若 X 是 κ- 仿紧空间且 $f:X\to Y$ 是完备满映射，则 Y 是 κ- 仿紧空间.

注　Ohta 曾举例说明，甚至对于 Tychonoff($=T_{3\frac{1}{2}}$)的可数仿紧空间，在闭映射下也不保持(见 Yajima[1984]).

2.I　(高[1980])试证：若 f 是正则空间 X 到仿紧空间 Y 上的闭映射，使得$\forall\ y\in Y$，$f^{-1}[y]$是 Lindelöf 的，则 X 是仿紧的.

2.J　空间 X 到 Y 的映射 f 称为**伪开的**，如果$\forall\ y\in Y\ \forall\ U\in N(f^{-1}[y])$，$y\in[f(U)]^{\circ}$. 显然开映射是伪开的.

试证：若 f 是空间 X 到 Y 的伪开满映射且 η 是 X 的半开覆盖，则$\{f[A]:A\in\eta\}$是 Y 的半开覆盖.

2.K　空间 X 称为**遗传仿紧的**，如果它的每个子空间是仿紧的.

试证：(Ⅰ)空间 X 是遗传仿紧的当且仅当它的每个开子空间是仿紧的.

(Ⅱ)若 T_2仿紧空间 X 是完全的，则 X 是遗传仿紧的.

2.L　试证：和空间$\sum_{s\in S}X_s$是 κ- 仿紧的当且仅当每个空间X_s是 κ- 仿紧的.

2.M　试证：若空间 X 有一个由 κ- 仿紧子空间组成的局部有限闭覆盖，则 X 是 κ- 仿紧的.

2.N　(Singal, M. K. and Arya, S. P. [1969])设$\{U_s:s\in S\}$是空间 X 的局部有限开覆盖使得$\forall\ s\in S$，$\overline{U}_s$是 κ- 仿紧子空间，则 X 是 κ- 仿紧的.

2.O 试证：若 X 是正规可数仿紧空间且 $f:X\to Y$ 是闭的满映射，则 Y 是正规可数仿紧空间.

2.P 对任意空间 X，称 X 的子集列 $\langle A_n\rangle_{n<\omega}$ 是**下降的**，如果 $\forall n<\omega, A_{n+1}\subset A_n$. 试证下列各条等价：

（Ⅰ） X 是可数仿紧的；

（Ⅱ） 对 X 内的下降闭集列 $\langle F_n\rangle$，使得 $\bigcap_{n<\omega}F_n=\varnothing$，$X$ 内有下降开集列 $\langle U_n\rangle$，使得 $\bigcap_{n<\omega}\overline{U_n}=\varnothing$ 且 $\forall n<\omega, F_n\subset U_n$；

（Ⅲ） 对 X 内的下降闭集列 $\langle F_n\rangle$，使得 $\bigcap_{n<\omega}F_n=\varnothing$，$X$ 内有开集列 $\langle U_n\rangle$，使得 $\bigcap_{n<\omega}\overline{U_n}=\varnothing$ 且 $\forall n<\omega, F_n\subset U_n$；

（Ⅳ） X 的每个可数上升开覆盖有一个精确闭加细 $\{F_n:n<\omega\}$，使得 $\{F_n^\circ:n<\omega\}$ 覆盖 X.

2.Q 试证：空间 X 是可数仿紧的当且仅当它的每个可数上升开覆盖有 σ- 垫状开加细.

2.R 试证：（Ⅰ）(Aull[1965]) 第一可数的 T_2 可数仿紧空间是正则的.

（Ⅱ） 设正则可数仿紧空间 X 的每个闭子集有可数邻域基，则 X 是正规的.

2.S （蒋[1987b]）空间 X 的开覆盖序列 $\langle\varphi_n\rangle_{n<\omega}$ 称为 X 的 cs-**展开**，如果对每个收敛序列 $\langle x_n\rangle\to x$，族 $\{\mathrm{St}(T(x,m),\varphi_n):m,n<\omega\}$ 是 x 的邻域基. 此处 $T(x,m)=\{x_n:n\geq m\}$.

试证：一个拓扑空间是可伪度量的当且仅当它有一个 cs-展开.

第三章　正规与集体正规空间

本章前两节分别介绍正规空间与集体正规空间的基本性质.积空间的正规性是一般拓扑学中十分有趣又很困难的部分,这方面的内容已很丰富. 在专著《集论拓扑手册》的第 18 章,即 Przymusinski[1984]中已有系统介绍. 我们不打算在这里重复. 本章主要介绍几个有代表性的重要结果,让读者了解这方面的某些技巧.特别是 Rudin[1975]的主要结果,由于在《集论拓扑手册》中只介绍了一个结果且没有证明,我们在这里作了补充介绍.第三节介绍与集体正规空间和广义仿紧空间皆有紧密联系的可膨胀空间. 第四节则介绍 Σ-积的正规性的一个较新的结果.

§3.1　正规空间

正规空间的概念在前一章中已提到.此外,在一般拓扑学的基础教材里(如蒲保明等著《拓扑学》[1985]第五章)都介绍了下面两个重要结果:Urysohn 引理和 Tietze 扩张定理. 在这里,我们只写出定理,而把证明略去.

3.1.1 Uryshon 引理(Uryshon[1925])空间 X 是正规的当且仅当对 X 内任意不相交的闭集 A 与 B,存在连续函数 $f:X\to I$,使得$f[A]\subset\{0\}$,$f[B]\subset\{1\}$.

3.1.2 Tietze 扩张引理(Tietze[1915])空间 X 是正规的当且仅当对 X 内任一闭集 E,从 E 到数直线 R(或 R 的子空间 I)的每个连续函数都有到 X 上的连续扩张.

3.1.3 **定理** 对任意空间 X,下列各条等价:

(Ⅰ) X 是正规的;

(Ⅱ) 若 F 闭于 X 且 $U\in N(F)$,则存在 W 开于 X,使得 $F\subset W\subset\overline{W}\subset U$;

(Ⅲ) 若 F 闭于 X 且 $U\in N(F)$,则 X 内有开集列 $\langle W_n\rangle$,使得 $F\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}W_n\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}\overline{W}_n\subset U$;

(Ⅳ) 对于 X 内任意不相交闭集 A 与 B,X 内有 σ-闭包保持的开集族 η,使得 $A\cup B\subset\bigcup\eta$ 且$\forall U\in\eta$,$\overline{U}\cap A=\varnothing$或 $\overline{U}\cap B=\varnothing$.

证 (Ⅰ)→(Ⅱ)设 F 闭于 X 且 $U\in N(F)$. 则$\exists W\in N(F)$,$V\in N(X\setminus U)$且 $W\cap V=\varnothing$,于是 $\overline{W}\cap V=\varnothing$,$\overline{W}\subset X\setminus V\subset U$.

(Ⅱ)→(Ⅲ)显然.

(Ⅲ)→(Ⅳ)设 A,B 闭于 X 且 $A\cap B=\varnothing$. 则 X 内有开集列 $\langle W_n\rangle$与$\langle V_n\rangle$,使得

$$A\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}W_n\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}\overline{W}_n\subset X\setminus B,$$

$$B\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}V_n\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}\overline{V}_n\subset X\setminus A.$$

易见,$\eta=\{W_n:n<\omega\}\cup\{V_n:n<\omega\}$是 X 内的 σ-闭包保持开集族,使得

$$A\cup B\subset\bigcup\eta \text{ 且}\forall n<\omega,$$

$$\overline{W}_n\cap B=\varnothing,\overline{V}_n\cap A=\varnothing.$$

(Ⅳ)→(Ⅰ)设 A,B 是 X 内不相交的闭集. 由假设(Ⅳ),X 内有开集族 $\eta=\bigcup_{n=0}^{\infty}\eta_n$,每个 η_n 是闭包保持的,$A\cup B\subset\bigcup\eta$ 且 $\forall U\in\eta,\overline{U}\cap A=\varnothing$ 或 $\overline{U}\cap B=\varnothing$. $\forall n<\omega$,令

$$G_n=\bigcup\{U\in\eta_n:\overline{U}\cap B=\varnothing\},$$

$$H_n=\bigcup\{U\in\eta_n:\overline{U}\cap A=\varnothing\},$$

$$G=\bigcup_{n=0}^{\infty}(G_n\setminus\bigcup_{i\leqslant n}\overline{H}_i),H=\bigcup_{n=0}^{\infty}(H_n\setminus\bigcup_{i\leqslant n}\overline{G}_i).$$

则 $G\in N(A),H\in N(B)$ 且 $G\cap H=\varnothing$. X 是正规的,证毕.

3.1.4　系　正规空间的每个 F_σ-集是正规子空间.

证　设 $A=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$ 是正规空间 X 内的 F_σ-集,每个 A_n 闭于 X. 设 F 闭子 A,U 开于 A,使得 $F\subset U$,则存在 X 的闭集 E 和开集 V,使得

$$U=V\cap A,\quad F=E\cap A=\bigcup_{n=0}^{\infty}(E\cap A_n).$$

$$\forall n<\omega,E\cap A_n\subset F\subset U\subset V.$$

则存在 X 的开集 V_n,使得 $E\cap A_n\subset V_n\subset\overline{V}_n\subset V$. 于是 $W_n=V_n\cap A$ 开于 A,且

$$F\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}W_n\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}(\overline{W}_n\cap A)\subset U.$$

据 3.1.3,A 是正规的. 证毕.

3.1.5　定理　对任意空间 X,下列各条等价:

(Ⅰ)　是正规的;

(Ⅱ)　X 的每个局部有限开覆盖是正规的;

(Ⅲ)　X 的每个有限开覆盖是正规的.

证　(Ⅰ)→(Ⅱ)设 $\xi=\{U_s:s\in S\}$ 是正规空间 X 的局部有限开覆盖,则 ξ 有精确闭加细 $\{F_s:s\in S\}$. $\forall s\in S,F_s\subset U_s,\exists f_s:X\to\mathrm{I}$ 连续,使得 $f_s[F_s]\subset\{1\},f_s[X\setminus U_s]\subset\{0\}$. 令 $G_s=f_s^{-1}[(0,1]]$,则 $F_s\subset G_s\subset U_s$. $\{G_s:s\in S\}$ 是 ξ 的局部有限的函数开加细. 据 2.1.29,ξ 是正规的.

(Ⅱ)→(Ⅲ)显然.

(Ⅲ)→(Ⅰ)设$\xi=\{U(0),\cdots,U(n)\}$是空间X的有限开覆盖.由假设(Ⅲ),ξ是正规的.据2.1.21,存在度量空间Y,满映射$f:X\to Y$及Y的开覆盖η,使得$\{f^{-1}[V]:V\in\eta\}$加细ξ. $\forall V\in\eta\exists h(V)\leqslant n$,使得$f^{-1}[V]\subset U(h(V))$. $\forall i\leqslant n$,令

$$V_i=\bigcup\{V\in\eta:h(V))=i\}.$$

则$f^{-1}[V_i]\subset U(i)$. $\{V_i:i\leqslant n\}$是正规空间Y的有限开覆盖从而有精确闭加细$\{F_i:i\leqslant n\}$,$F_i\subset V_i$. 则$\{f^{-1}[F_i]:i\leqslant n\}$是$\xi$的精确闭加细.$X$是正规的.证毕.

3.1.6 引理 设X是正规空间且$f:X\to Y$是闭的满映射,则Y是正规空间.

证 设$\xi=\{U_0,\cdots,U_n\}$是Y的有限开覆盖,则$\{f^{-1}[U_i]:i\leqslant n\}$是$X$的有限开覆盖从而它有一个精确闭加细$\{F_i:i\leqslant n\}$. 因此$\{f[F_i]:i\leqslant n\}$是$\xi$的精确闭加细,$Y$是正规的.证毕.

3.1.7 定义 空间X是**遗传正规的**,如果它的每个子空间是正规的.

3.1.8 引理 对任意空间X,下列各条等价:

(Ⅰ) X是遗传正规的;

(Ⅱ) X的每个开子空间是正规的;

(Ⅲ) 若$A,B\subset X$,使得$\overline{A}\cap B=\varnothing$且$A\cap\overline{B}=\varnothing$. 则$\exists U\in N(A),V\in N(B),U\cap V=\varnothing$.

证 (Ⅰ)→(Ⅱ)显然.

(Ⅱ)→(Ⅲ)设$A,B\subset X$,使得$\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\varnothing$. 由假设(Ⅱ),开子空间$G=X\backslash(\overline{A}\cap\overline{B})$是正规的. $A,B\subset G$且

$$(\overline{A}\cap G)\cap(\overline{B}\cap G)=\varnothing.$$

则G内有不相交的开集U、V,使得$\overline{A}\cap G\subset U$,$\overline{B}\cap G\subset V$. 则$U\in$

$N(A), V\in N(B)$.

(Ⅱ)→(Ⅰ)设 $M\subset X$ 且 A,B 是 M 内的不相交闭集，则

$$\overline{A}\cap B=(\overline{A}\cap M)\cap B=A\cap B=\varnothing.$$

同理，$A\cap\overline{B}=\varnothing$. 由假设(Ⅱ)，$\exists U\in N(A), V\in N(B), U\cap V=\varnothing$，则 $A\subset U\cap M, B\subset V\cap M$ 且 $U\cap V\cap M=\varnothing$. M 是正规的. 证毕.

3.1.9　例　ω_1 是遗传正规的.

证　设 $A,B\subset\omega_1, \overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\varnothing$. $\forall\alpha\in A\subset X\backslash\overline{B}, \exists\xi_\alpha<\alpha$ 使得 $(\xi_\alpha,\alpha]\subset X\backslash\overline{B}$. $\forall\beta\in B, \exists\eta_\beta<\beta$，使得 $(\eta_\beta,\beta]\subset X\backslash\overline{A}$. 令

$$U=\bigcup_{\alpha\in A}(\xi_\alpha,\alpha], V=\bigcup_{\beta\in B}(\eta_\beta,\beta].$$

则 $U\in N(A), V\in N(B)$ 且 $U\cap V=\varnothing$. 由 3.1.8 得证.

3.1.10　引理　设 C 是紧空间且 $g: X\times C\to R$ 连续. 定义

$$h(x)=\sup\{g(x,t): t\in C\}, x\in X,$$

则 $h: X\to R$ 连续.

证　设 $x\in X, \varepsilon>0$. 现证 $\exists U\in N(x)$，使得 $\forall y\in U, \forall t\in C$，有

$$|g(y,t)-g(x,t)|<\varepsilon. \tag{1}$$

事实上，$\forall s\in C$，g 在 (x,s) 连续. 则 $\exists U(s)\in N(x), V(s)\in N(x)$，使得 $\forall(y,t)\in U(s)\times V(s)$，

$$|g(y,t)-g(x,s)|<\varepsilon/2.$$

因 C 是紧的，$\exists s_0,\cdots,s_n\in C$，使得 $C=\bigcup_{i=0}^{n}V(s_i)$. $U=\bigcap_{i=0}^{n}U(s_i)\in N(x)$. $\forall y\in U\forall t\in C\exists i\leqslant n, t\in V(s_i)$，则

$$|g(y,t)-g(x,t)|\leqslant|g(y,t)-g(x,s_i)|$$
$$+|g(x,s_i)-g(x,t)|<\varepsilon.$$

(1)真. 由此知 $\forall y\in U, |h(y)-h(x)|<\varepsilon$，引理得证.

3.1.11　引理　设 ρ 与 τ 分别是 X 上的伪度量与拓扑，则伪度量拓扑 T_ρ 粗于 τ 当且仅当

$$\rho: (X\times X, \tau\times\tau)\to R$$

连续．此处 $\tau\times\tau$ 表积拓扑．

证 （→）设 $T_\rho\subset\tau$，$\langle x,y\rangle\in X\times X$ 且 $\varepsilon>0$．则

$$W=B_\rho(x,\varepsilon/2)\times B_\rho(y,\varepsilon/2)$$

是 $\langle x,y\rangle$ 在积空间 $\langle X\times X,\tau\times\tau\rangle$ 内的邻域，且 $\forall\langle u,v\rangle\in W$，有

$$|\rho(u,v)-\rho(x,y)|<\varepsilon.$$

故 ρ 在 $\langle x,y\rangle$ 连续．

（←）只需证明 $\forall x\in X\forall\varepsilon>0,B_\rho(x,\varepsilon)\in\tau$．事实上，设 $y\in B_\rho(x,\varepsilon)$，$\delta=\varepsilon-\rho(x,y)>0$．由假设，$\rho$ 在 $\langle x,y\rangle$ 连续，$\exists U\in N(x)$，$V\in N(y)$，使得 $\forall\langle u,v\rangle\in U\times V$，有

$$|\rho(u,v)-\rho(x,y)|<\delta.$$

则 $V\subset B_\rho(x,\varepsilon)$，$B_\rho(x,\varepsilon)\in\tau$．证毕．

3.1.12 定理 （Tamano）[1960]）设 X 是 T_1 全正则空间，则下列各条等价：

（Ⅰ） X 是 T_2 仿紧的；

（Ⅱ） 对 X 的每个 T_2 紧化 cX，$X\times cX$ 是 T_1 正规的；

（Ⅲ） $X\times\beta X$ 是 T_1 正规的；（这里的 βX 表 T_1 全正则空间 X 的 Čech-Stone 紧化．）

（Ⅳ） X 有一个 T_2 紧化 cX，使得 $X\times cX$ 是 T_1 正规的．

证 （Ⅰ）→（Ⅱ）设 X 是 T_2 仿紧的且设 cX 是 X 的任一 T_2 紧化．则 $X\times cX$ 是 T_2 仿紧的，从而是 T_1 正规的．

（Ⅱ）→（Ⅲ）与（Ⅲ）→（Ⅳ）显然．

（Ⅳ）→（Ⅰ）设空间 $\langle X,\tau\rangle$ 有一个 T_2 紧化 cX，使得 $X\times cX$ 是 T_1 正规的．设 $\xi=\{U_s:s\in S\}$ 是 X 的开覆盖．$\forall s\in S$，设 V_s 开于 cX，使得 $U_s=V_s\cap X$．令 $F=cX\setminus\bigcup\{V_s:s\in S\}$，则 id_X 与 $X\times F$ 是 T_1 正规空间 $X\times cX$ 内的不相交闭集，于是 $\exists f:X\times cX\to I$ 连续，使得

$$f[\mathrm{id}_X]\subset\{0\},f[X\times F]\subset\{1\}.$$

定义

$$\rho(x,y)=\sup\{|f(x,t)-f(y,t)|: t\in cX\}, x,y\in X.$$

则 ρ 是 X 上的连续伪度量，使得伪度量拓扑 $T_\rho\subset\tau$. 伪度量空间 (X,ρ) 是仿紧的，它的开覆盖 $\eta=\{B_\rho(x,\frac{1}{4}): x\in X\}$ 在 (X,ρ) 内有局部有限开加细 ζ. 则 ζ 也是 η 在 (X,τ) 内的局部有限开加细. 现证

$$\forall W\in\zeta, \overline{W}\cap F=\varnothing. \tag{1}$$

此处闭包是在 cX 内取的. 事实上，若 $\exists W\in\zeta$，使得 $\exists y\in\overline{W}\cap F$. 任取 $x\in W$，则 $(x,y)\in X\times F$，从而 $f(x,y)=1$. 其次，存在邻域 $G\in N_X(x)$ 与 $H\in N_{cX}(y)$，使得 $\forall(u,v)\in G\times H$，

$$|f(u,v)-f(x,y)|=|f(u,v)-1|<\frac{1}{3},$$

则有　$\forall(u,v)\in G\times H, f(u,v)>\frac{1}{2}$.

因 $y\in\overline{W}$，$\exists q\in W\cap H$，$(x,q)\in G\times H$. 从而

$$f(x,q)>\frac{1}{2}. \tag{2}$$

另一方面，设 $t\in X$，使得 $W\subset B_\rho(t,\frac{1}{4})$. 因 $x,q\in W$ 且 $(q,q)\in \mathrm{id}_X$，有

$$f(x,q)=|f(x,q)-f(q,q)|\leqslant\rho(x,q)\leqslant\rho(x,t)+\rho(t,q)<\frac{1}{2}.$$

这与(2)矛盾. (1)真.

$\forall W\in\zeta$，据(1)，$\overline{W}\subset cX\setminus F=\bigcup\{V_s: s\in S\}$. $\overline{W}$ 是紧的，故有有限子集 $S(W)\subset S$，使得 $\overline{W}\subset\bigcup\{V_s: s\in S(W)\}$. 则

$$W\subset\overline{W}\cap X\subset\{U_s: s\in S(W)\}.$$

令

$$\varphi=\{W\cap U_s: s\in S(W), W\in\zeta\}.$$

易知 φ 是 ξ 的局部有限开加细，于是 X 是 T_2 仿紧的．证毕．

3.1.13　引理　设 X 是列紧空间，Y 是可数紧空间，则 $X\times Y$ 是可数紧空间．

证　设 $\langle\langle x_n,y_n\rangle\rangle_{n=0}^{\infty}$ 是 $X\times Y$ 内任一序列，则 X 内的序列 $\langle x_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ 有收敛子序列 $\langle x_{n_k}\rangle_{k=0}^{\infty}\to x$．$Y$ 内的序列 $\langle y_{n_k}\rangle$ 有一个聚点 y．则 $\langle x,y\rangle$ 是序列 $\langle\langle x_n,y_n\rangle\rangle_{n=0}^{\infty}$ 的聚点．$X\times Y$ 是可数仿紧的．证毕．

3.1.14　例　（Ⅰ）　遗传正规空间与 T_2 紧空间之积不必正规．

（Ⅱ）　存在 T_2 可数仿紧空间不正规．

证　（Ⅰ）据 3.1.9，ω_1 是遗传正规的．据蒲保明等[1985] 4.3.8，它还是列紧的．据该书 4.2.5 及 2.4.B，ω_1+1 是 T_2 紧的，从而是 ω_1 的 T_2 紧化．ω_1 是可数紧的非紧空间．据 2.2.7，ω_1 不是仿紧的．据 3.1.12，$\omega_1\times(\omega_1+1)$ 不是正规的．

（Ⅱ）据 3.1.13，$\omega_1\times(\omega_1+1)$ 是 T_2 可数紧的，从而是 T_2 可数仿紧的．证毕．

上例的（Ⅱ）说明 T_2 可数仿紧空间不必正规．反之，T_2 正规空间是否也不必可数仿紧呢？这曾是点集拓扑学中的著名问题，它是 Dowker[1951]中提出的．经过点集拓扑学家 20 年的努力，终于被 M. E. Rudin[1971]所解决．

3.1.15　定义　对任意空间 X，基数

$w(X)=\omega+\min\{|\xi|:\xi$ 是 X 的基$\}$叫空间 X 的权．显然 X 是第二可数的当且仅当 $w(X)=\omega$．

X 的子集族 ξ 称为**对有限交（并）是封闭的**，如果 ξ 的每个有限子族的交（并），简称有限交（并），属于 ξ．设 η 是空间 X 的任一基．η 的一切有限交组成的族 η' 仍是 X 的基且对有限交封闭．η' 的一切有限并的族 η'' 也是 X 的基且对有限交和有限并皆封闭．

3.1.16　定义　设 C 是无限的 T_2 紧空间，$\eta(C)$ 是 C 的一个基，它对有限交和有限并是封闭的且设 $|\eta(C)|=w(C)=\kappa$，令

$$\{\langle B,D\rangle : B,D\in\eta(C),\overline{B}\cap\overline{D}=\varnothing\}$$
$$=\{B_\alpha=\langle B_\alpha^0,B_\alpha^1\rangle : \alpha<\kappa\}.$$

（Ⅰ）　$\forall\alpha,\beta<\kappa, B_\alpha\wedge B_\beta=\langle B_\alpha^0\cap B_\beta^0, B_\alpha^1\cap B_\beta^1\rangle$.

（Ⅱ）　空间 X 的开覆盖 φ 是一个 $\eta(C)$-**覆盖**，如果 $\{\varphi=\{G(B_\alpha) : \alpha<\kappa\}$，使得 $\forall\alpha,\beta<\kappa$，

$$G(B_\alpha)\cap G(B_\beta)=G(B_\alpha\wedge B_\beta).$$

（Ⅲ）　设 K_0,K_1 是积空间 $X\times C$ 内的不相交闭集．空间 X 的一个开覆盖 ξ **是关于** $K=\langle K_0,K_1\rangle$**的** $\eta(C)$-**覆盖**，如果 $\xi=\{H(K,B_\alpha) : \alpha<\kappa\}$，其中

$$H(K,B_\alpha)=\{x\in X : \forall i<2(K_i[x]\subset B_\alpha^i)\}$$
$$=X\setminus P_X[\bigcup_{i<2}(K_i\setminus(X\times B_\alpha^i))],$$

这里 $P_X : X\times C\to X$ 表投射．

注　（Ⅰ）　容易验证 ξ 确是 X 的 $\eta(C)$-覆盖，即 ξ 是 X 的开覆盖，使得 $\forall\alpha,\beta<\kappa$，

$$H(K,B_\alpha)\cap H(K,B_\beta)=H(K,B_\alpha\wedge B_\beta).$$

（Ⅱ）　若 $\alpha,\beta<\kappa$ 使得 $B_\alpha^0\subset B_\beta^0$ 且 $B_\alpha^1\subset B_\beta^1$，则

$$G(B_\alpha)\subset G(B_\beta).$$

（Ⅲ）　假设 C 是无限的并不失一般性．因为我们的目的是为了研究积空间 $X\times C$ 的正规性．当 T_2 紧空间 C 有限时是离散的，这时显然 $X\times C$ 正规当且仅当 X 是正规的．

3.1.17　定理　（Przymusinski[1984]）设 C 是无限的 T_2 紧空间，$\langle X,\tau\rangle$ 是任意空间，则下列各条等价：

（Ⅰ）　$X\times C$ 是正规的；

（Ⅱ）　X 是正规的且 X 的每个 $\eta(C)$-覆盖有局部有限的开加

细.

(Ⅱ) X 是正规的且对于 $X\times C$ 内每一对不相交的闭集 K_0 与 K_1，X 的关于 $\langle K_0,K_1\rangle$ 的 $\eta(C)$-覆盖有局部有限开加细.

证 (Ⅰ)→(Ⅱ)设 $X\times C$ 是正规的. 则 X 显然是正规的. 设 $\varphi=\{G(B_\alpha):\alpha<\kappa\}$ 是 X 的 $\eta(C)$-覆盖，此处 $\{B_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 3.1.16 中定义的族. 令

$$K_i=X\times C\setminus\bigcup\{G(B_\alpha)\times(C\setminus\overline{B}_\alpha^i):\alpha<\kappa\},i<2.$$

则 K_0 与 K_1 是不相交的闭集. $\exists f:X\times C\to I$ 连续使得 $f[K_0]\subset\{0\}$，$f[K_1]\subset\{1\}$. 定义

$$\rho(x,y)=\sup\{|f(x,t)-f(y,t)|:t\in C\}\ ,x,y\in X.$$

则 ρ 是 X 上的连续伪度量，使得伪度量拓扑 $T_\rho\subset\tau$. 伪度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 是仿紧的，它的开覆盖 $\theta=\{B_\rho(x,\frac{1}{3}):x\in X\}$ 有在 $\langle X,\rho\rangle$ 内的局部有限开加细 ζ，ζ 也是 $\langle X,\tau\rangle$ 的局部有限开覆盖. 只需再证 ζ 是 φ 的加细，也只需证 θ 是 φ 的加细. 为此，设 $x_0\in X$，令

$$E=\{y\in C:f(x_0,y)\leqslant\frac{1}{3}\},F=\{y\in C:f(x_0,y)\geqslant\frac{2}{3}\}.$$

E,F 是正规空间 C 内的不相交的紧、闭集. 因 $\eta(C)$ 对有限并封闭，$\exists\alpha<\kappa$，使得 $E\subset B_\alpha^0,F\subset B_\alpha^1$. 只需证

$$B_\rho(x_0,\frac{1}{3})\subset G(B_\alpha).\tag{1}$$

设 $x\in B_\rho(x_0,\frac{1}{3})$，则 $\rho(x,x_0)<\frac{1}{3}$. 若 $\exists y\in K_0[x]\setminus B_\alpha^0$，则 $f(x,y)=0$ 且 $y\notin B_\alpha^0\supset E$，$f(x_0,y)>\frac{1}{3}$. $\rho(x,x_0)\geqslant|f(x,y)-f(x_0,y)|>\frac{1}{3}$. 矛盾. 故 $K_0[x]\subset B_\alpha^0$. 同理，$K_1[x]\subset B_\alpha^1$.

$$\{x\}\times(C\setminus B_\alpha^0)\subset\{x\}\times C\setminus K_0\subset\bigcup\{G(B_\beta)\times(C\setminus\overline{B}_\beta^0):\beta<\kappa\}.$$

因 $C\setminus B_\alpha^0$ 是紧的，$\exists\beta_0,\cdots,\beta_m<\kappa$，使得

$$C\setminus\overline{B}_\alpha^0\subset\bigcup_{i=0}^{m}(C\setminus\overline{B}_{\beta_i}^0)\text{且 }x\in\bigcap_{i=0}^{m}G(B_{\beta_i}).$$

同理，$\exists\gamma_0,\cdots,\gamma_n<\kappa$，使得

$$C\setminus B^1_\alpha\subset\bigcup_{j=0}^{n}(C\setminus\overline{B}^1_{\gamma_j})\text{ 且 }x\in\bigcap_{j=0}^{n}G(B_{\gamma_j}).$$

则

$$B^0_\alpha\supset\bigcap_{i=0}^{m}\overline{B}^0_{\beta_i}\supset\bigcap_{i=0}^{m}B^0_{\beta_i}\cap\bigcap_{j=0}^{n}B^0_{\gamma_j},$$

$$B^1_\alpha\supset\bigcap_{j=0}^{n}\overline{B}^1_{\gamma_j}\supset\bigcap_{i=0}^{m}B^1_{\beta_i}\cap\bigcap_{j=0}^{n}B^1_{\gamma_j}.$$

于是有 $x\in\bigcap_{i=0}^{m}G(B_{\beta_i})\cap\bigcap_{j=0}^{n}G(B_{\gamma_j})=G(B_{\beta_0}\wedge\cdots\wedge B_{\beta_m}\wedge B_{\gamma_0}\wedge\cdots\wedge B_{\gamma_n})\subset G(B_\alpha)$，(1)真.

(Ⅱ)→(Ⅲ)显然.

(Ⅲ)→(Ⅰ)设 X 是正规空间且 $X\times C$ 合条件(Ⅲ)，设 K_0,K_1 是 $X\times C$ 内不相交的闭集. ξ 是关于 $K=(K_0,K_1)$ 的 $\eta(C)$-覆盖，即 $\xi=\{H(K,B_\alpha):\alpha<\kappa\}$，其中

$$H(K,B_\alpha)=\{x\in X:\forall i<2,K_i[x]\subset B^i_\alpha\}.$$

$\{B_\alpha:\alpha<\kappa\}$是 3.1.16 中定义的族. 由假设(Ⅲ)，$\xi$ 有局部有限精确开加细$\{V_\alpha:\alpha<\kappa\}$. 因 X 正规，不妨设 $\overline{V}_\alpha\subset H(K,B_\alpha)$，$\alpha<\kappa$. 令 $\varphi_i=\{V_\alpha\times B^i_\alpha:\alpha<\kappa\}$，$i<2$. 则 φ_i 是 $X\times C$ 内的局部有限开集族，使得 $K_i\subset\bigcup\varphi_i$，且 $\forall P\in\varphi_i$，$\overline{P}\cap K_{1-i}=\varnothing$，$i<2$. 据 3.1.3，$X\times C$ 是正规的. 证毕.

3.1.18　系　(Morita[1962])设 C 上 T_2 紧空间且 X 是正规的 $\eta(C)$-仿紧空间，则 $X\times C$ 是正规的.

3.1.19　定理(Rudin[1975])　设 C 是无限的 T_2 紧空间，则下列各条等价：

(Ⅰ)　$X\times C$ 是正规的；

(Ⅱ)　X 的每个 $\eta(C)$-覆盖有局部有限闭加细；

(Ⅲ)　对 $X\times C$ 内每一对不相交的闭集 K_0 与 K_1，X 的关于

(K_0, K_1)的 $\eta(C)$-覆盖有局部有限闭加细.

证 (Ⅰ)→(Ⅱ)设 $X\times C$ 是正规的且 φ 是 X 的 $\eta(C)$-覆盖. 据 3.1.17, X 是正规的且 φ 有一个局部有限开加细 θ. 设 ξ 是 θ 的一个收缩, 则$\{\overline{W}: W\in\xi\}$是 φ 的局部有限闭加细.

(Ⅱ)→(Ⅲ)显然.

(Ⅲ)→(Ⅰ)设 K_0, K_1 是 $X\times C$ 内不相交的闭集且 $\xi=\{H(K, B_\alpha): \alpha<\kappa\}$是 X 的关于 $K=(K_0, K_1)$的 $\eta(C)$-覆盖, $H(K, B_\alpha)$的定义见 3.1.16. 由假设(Ⅲ), ξ 有一个局部有限精确闭加细$\{F_\alpha: \alpha<\kappa\}$. $\forall x\in X$, $S(x)=\{\alpha<\kappa: x\in F_\alpha\}$是不空有限的. $R(x)=X\setminus\bigcup\{F_\alpha: \alpha\notin S(x)\}$是 x 的邻域. 令 $V_i(x)=\bigcap\{B_\alpha^i: \alpha\in S(x)\}$, $i=0,1$. 它们是开集. 令

$$U_i=\bigcup\{R(x)\times V_i(x): x\in X\}, i<2.$$

则 U_i 开于 $X\times C$, 使得 $K_i\subset U_i$. 若$\exists(x,y)\in U_0\cap U_1$, 则$\exists p, q\in X$, 使得

$$(x,y)\in(R(p)\times V_0(p))\cap(R(q)\times V_1(q)).$$

又$\exists\alpha_0<\kappa$, 使得 $x\in F_{\alpha_0}$. 因 $x\in R(p)$, $\forall\alpha\notin S(p)$, $x\notin F_\alpha$. 则 $\alpha_0\in s(p)$, 从而 $y\in V_0(p)\subset B_{\alpha_0}^0$. 同理, 因 $x\in R(q)$, $\alpha_0\in S(q)$. 则 $y\in V_1(q)\subset B_{\alpha_0}^1$. 但 $\overline{B}_{\alpha_0}^0\cap\overline{B}_{\alpha_0}^1=\varphi$, 矛盾. 故 $U_0\cap U_1=\varnothing$, $X\times C$ 是正规的. 证毕.

3.1.20 定理(Dowker[1951]) 空间 X 是正规和可数仿紧的当且仅当 $X\times I$ 是正规的.

证 (→)因 I 是 T_2 紧的, 且 $w(I)=\omega$, 由 3.1.17 知, $X\times I$ 是正规的.

(←)设 $X\times I$ 是正规的. 因 X 与 $X\times I$ 的闭子空间 $X\times\{0\}$同胚, X 是正规的. 现证 X 是可数仿紧的, 设 $\xi=\{U_n: n<\omega\}$是 X 的可数上升开覆盖. 令

$$A=\bigcup_{n=0}^{\infty}((X\setminus U_n)\times\{\frac{1}{n+1}\}), \quad B=X\times\{0\}.$$

则 A,B 是 $X\times I$ 内的不相交闭集，于是 $X\times I$ 内有不相交开集 U 和 V，使得 $A\subset U,B\subset V$.

$\forall n<\omega$，令 $W_n=\{x\in X:\langle X,\frac{1}{n+1}\rangle\in U\}$，则 W_n 是开集．若 $\exists x\in\bigcap_{n=0}^{\infty}\overline{W}_n$．$\forall G\in N(x)\forall H\in N(0)\exists n<\omega,n>0,[0,\frac{1}{n})\subset H$．因 $x\in$ ，$\exists x_n\in G\cap W_n$，则

$$\langle x_n,\frac{1}{n+1}\rangle\in(G\times H)\cap U.$$

于是 $\langle x,0\rangle\in\overline{U}\cap B\subset\overline{U}\cap V=\varnothing$，矛盾．故 $\bigcap_{n=0}^{\infty}\overline{W}_n=\varnothing$，$\forall n<\omega$，令 $V_n=X\setminus\overline{W}_n$，则

$$\overline{V}_n\subset X\setminus W_n\subset U_n.$$

于是 $\{V_n:n<\omega\}$ 是 ξ 的收缩，X 是可数仿紧的．证毕．

§3.2　集体正规空间

我们在 2.2.13 中已介绍了 κ-集体正规($\kappa\geqslant 2$)与集体正规空间的定义，下面首先介绍它的刻画．

3.2.1　定理　对任意空间 X，下列各条等价：

(Ⅰ)　X 是 κ-集体正规的；

(Ⅱ)　对 X 内任意的离散闭集族 $\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$，$X$ 内有离散开集族 $\{V_\alpha:\alpha<\kappa\}$，使得 $\forall\alpha<\kappa,F_\alpha\subset V_\alpha$；

(Ⅲ)　对 X 内任意的离散闭集族 $\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$，$X$ 内有开集族 $\{V(\alpha,n):\alpha<\kappa,n<\omega\}$，使得

(a)　$\forall\alpha<\kappa,F_\alpha\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}V(\alpha,n)$，

(b)　$\forall\alpha<\kappa,n<\omega,F_\alpha\cap\overline{\bigcup_{\beta\neq\alpha}V(\beta,n)}=\varnothing$.

证 (Ⅰ)→(Ⅱ)设$\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$\kappa$-集体正规空间$X$内的离散闭集族，则$X$内有互不相交开集族$\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$，使得$F_\alpha\subset U_\alpha$. 令

$$A=\bigcup_{\alpha<\kappa}F_\alpha,\qquad B=X\setminus\bigcup_{\alpha<\kappa}U_\alpha.$$

则A,B是不相交的闭集. 因为X是正规的，有不相交的开集G,H使得$A\subset G,B\subset H$. $\forall\alpha<\kappa$，令$V_\alpha=U_\alpha\cap G$，则$F_\alpha\subset V_\alpha$且$\{V\alpha:\alpha<\kappa\}$是离散开集族.

(Ⅱ)→(Ⅲ)设$\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$X$内的离散闭集族. 由假设(Ⅱ)，$X$内有离散开集族$\{V_\alpha:\alpha<\kappa\}$，使得$\forall\alpha<\kappa,F_\alpha\subset V_\alpha$. 在(Ⅱ)的假设下，$X$是正规的. 于是$X$内有开集$V(\alpha,0)$，使得$F_\alpha\subset V(\alpha,0)\subset\overline{V(\alpha,0)}\subset V_\alpha$.

$\forall n\geqslant 1,\alpha<\kappa$，令$V(\alpha,n)=\varnothing$，则开集族$\{V(\alpha,n):\alpha<\kappa,n<\omega\}$合(Ⅲ)中的条件(a)和(b).

(Ⅲ)→(Ⅰ)设$\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$X$内的离散闭集族. 由假设(Ⅲ)，$X$内有开集族$\{V(\alpha,n):\alpha<\kappa,n<\omega\}$合条件(a)和(b). $\forall\alpha<\kappa$，令

$$U_\alpha=\bigcup_{n=0}^{\infty}\Big(V(\alpha,n)\setminus\bigcup_{i\leq n}\overline{\bigcup_{\beta\neq\alpha}V(\beta,i)}\Big).$$

则$\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$是互不相交开集族，使得$\forall\alpha<\kappa,F_\alpha\subset U_\alpha$. X是κ-集体正规的. 证毕.

3.2.2 引理 空间X是κ-集体正规的当且仅当对于X内任一离散闭集族$\varphi=\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$，$X$内有$\sigma$-闭包保持开集族$\xi$，使得$\bigcup\varphi\subset\bigcup\xi$，且$\forall U\in\xi,\overline{U}$至多与$\varphi$的一个元相交.

证 (→)显然.

(←)设$\varphi=\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$X$内的离散闭集族. 由假设$X$内有开集族$\xi=\bigcup_{n=0}^{\infty}\xi_n$，使得每个$\xi_n$是闭包保持的，$\bigcup\varphi\subset\bigcup\xi$且$\forall U\in\xi,\overline{U}$至多与$\varphi$的一个元相交. $\forall\alpha<\kappa$，令

$$U_\alpha=\bigcup_{n=0}^{\infty}\Big(\mathrm{St}(F_\alpha,\xi_n)\setminus\bigcup\{\overline{U}:U\in\bigcup_{i=0}^{n}\xi_i,\overline{U}\cap F_\alpha=\varnothing\}\Big).$$

则$\{U_\alpha: \alpha<\kappa\}$是互不相交开集族，使得$\forall\alpha<\kappa, F_\alpha\subset U_\alpha$．$X$是$\kappa$-集体正规的．证毕．

3.2.3　引理　κ-集体正规空间的F_σ-集是κ-集体正规子空间．

证　设$A=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$是$\kappa$-集体正规空间$X$的$F_\sigma$-集，每个$A_n$闭于$X$．设$\{F_\alpha: \alpha<\kappa\}$是$A$内的离散闭集族．$\forall n<\omega$，$\{F_\alpha\cap A_n: \alpha<\kappa\}$是闭集$A_n$内的离散闭集族，从而也是$X$内的离散闭集族．$X$内有离散开集族$\{V(\alpha,n): \alpha<\kappa\}$，使得$F_\alpha\cap A_n\subset V(\alpha,n)$．其次，$X$是正规的且$F_\alpha\cap A_n\subset X\setminus\bigcup_{\beta\neq\alpha}F_\beta$．则$X$有开集$W(\alpha,n)$，使得

$$F_\alpha\cap A_n\subset W(\alpha,n)\subset\overline{W(\alpha,n)}\subset V(\alpha,n)\setminus\bigcup_{\beta\neq\alpha}F_\beta.$$

令

$$G(\alpha,n)=A\cap\Big(W(\alpha,n)\setminus\bigcup_{i\leqslant n}\bigcup_{\beta\neq\alpha}\overline{W(\beta,i)}\Big),$$

则$\{G(\alpha,n): \alpha<\kappa, n<\omega\}$是$A$内的开集族且合于：

(a)　$\forall\alpha<\kappa, F_\alpha\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}G(\alpha,n)$.

(b)　$\forall\alpha<\kappa, n<\omega, F_\alpha\cap\overline{\bigcup_{\beta\neq\alpha}G(\beta,n)}=\varnothing$.

A是κ-集体正规的．证毕．

3.2.4　引理　对任意空间X，下列各条等价：

(Ⅰ)　X是正规的；

(Ⅱ)　X是ω-集体正规的；

(Ⅲ)　$\forall n<\omega$，若$n\geqslant 2$，X是n-集体正规的；

(Ⅳ)　$\exists n<\omega, n\geqslant 2$，$X$是$n$-集体正规的．

证　(Ⅰ)→(Ⅱ)设$\{F_n: n<\omega\}$是正规空间X内的离散闭集族．$F=\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n$是闭集．$\forall n<\omega$，固定之，让$f_n: F_n\to R$表常值映射：$\forall x\in F_n, f_n(x)=n$，因$\{F_n: n<\omega\}$是$F$的局部有限闭覆盖，据蒲保明等[1985]3.2.12，$f=\bigtriangledown_{n<\omega}f_n: F\to R$连续．据Tietze扩张定理3.1.2，

$\exists g: X\to R$ 连续，使得 $g|F=f$，$\forall n<\omega$，令 $U_n=g^{-1}[(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})]$，则 $\{U_n: n<\omega\}$ 是 X 内的互不相交开集族，使得 $F_n\subset U_n$. X 是 ω-集体正规的.

(Ⅱ)→(Ⅲ)，(Ⅲ)→(Ⅳ)及(Ⅳ)→(Ⅰ)皆是显然的. 证毕.

3.2.5　定义(Smith[1975])空间 X **具有性质**(δ)，如果 X 内每个离散子集族是可数的.

由蒲保明等[1985]4.3.4 知，可数紧空间具有性质(δ).

3.2.6　系　具有性质(δ)的正规空间是集体正规的.

3.2.7　例　存在 T_2 集体正规空间，它不是仿紧的从而不是完满正规的.

证　由 3.1.14 知 ω_1 是 T_2 正规可数紧的且非仿紧. 由上面的系知 ω_1 是集体正规的. 证毕.

3.2.8　例　给定空间 $\langle X,\tau\rangle$，τ 的一个基 η 及 $M\subset X$. 令

$$\xi_x=\begin{cases}\{x\}, & \text{当 } x\in X\setminus M,\\ (\eta)_x, & \text{当 } x\in M.\end{cases}$$

在 X 上，以 ξ_x 为点 $x\in X$ 的邻域基生成一个拓扑 $T(\tau,M)$，空间 $\langle X,T(\tau,M)\rangle$ 简记为 X_M，则有

(Ⅰ)　$T(\tau,M)=\{U\cup A: U\in\tau, A\subset X\setminus M\}$；

(Ⅱ)　$\tau\subset T(\tau,M)$；

(Ⅲ)　τ 与 $T(\tau,M)$ 在 M 上的子拓扑相同，即 $\tau|M=T(\tau,M)|M$；

(Ⅳ)　若 $Y\subset X$，则

$$T(\tau,M)|Y=T(\tau|Y,Y\cap M),$$

即 Y 作为 X_M 的子空间就是 $Y_{(Y\cap M)}$.

(Ⅴ)　若对 M 内任意不相交的闭集 A 与 B，$\exists U,V\in\tau$，使得

$$A\subset U,\ B\subset V \text{ 且 } U\cap V=\varnothing.$$

则 X_M 是正规的.

证　(Ⅰ)—(Ⅳ)由有关的定义直接知.

(Ⅴ)设 K 与 L 是 X_M 内不相交的闭集,令 $A=K\cap M, B=L\cap M$. 由(Ⅴ)的假设,$\exists U,V\in\tau$,使得

$$A\subset U, B\subset V \text{ 且 } U\cap V=\varnothing.$$

令

$$G=(U\setminus L)\cup(K\setminus M), H=(V\setminus K)\cup(L\setminus M).$$

由(Ⅱ)知,$U\setminus L$ 开于 X_M. 据(Ⅰ),设 $U\setminus L=W\cup D$,其中 $W\in\tau$ 且 $D\subset X\setminus M$. 则由(Ⅰ)知,

$$G=W\cup(D\cup(K\setminus M))\text{开于 } X_M.$$

同理知,H 开于 X_M. 其次,$A\cap L\subset K\cap L=\varnothing$.

则

$$K=A\cup(K\setminus M)\subset(U\setminus L)\cup(K\setminus M)=G.$$

同理知 $L\subset H$,易知 $G\cap H=\varnothing$,因此 X_M 是正规的. 证毕.

3.2.9　定义　空间 X 是 ccc **空间或满足** ccc(ccc=可数链条件),如果 X 内的每个互不相交开集族是可数的.

3.2.10　引理　可分空间是 ccc 空间.

3.2.11　引理　任意一族可分空间的积空间是 ccc 空间.

证　反证,若存在一个积空间 $X=\prod_{s\in S}X_s$ 不是 ccc 空间,而其中每个 X_s 是可分的. 则 X 内有一个由不空开集组成的互不相交族 $\{U_\alpha: \alpha<\omega_1\}$,使得 $\alpha\neq\beta$ 时 $U_\alpha\neq U_\beta$. 不妨设每个 U_α 是积空间的基本开集,即$\forall\alpha<\omega_1, U_\alpha=\prod_{s\in S}W_s^\alpha$,每个 W_s^α 开于 X_s 且存在有限子集 $S_\alpha\subset S$ 使得$\forall s\in S\setminus S_\alpha, W_s^\alpha=X_s$. 令 $T=\bigcup_{\alpha<\omega_1}S_\alpha$,则 $|T|\leqslant\omega_1\leqslant 2^\omega$. 据蒲保明等[1985]3.2.24 知,$Y=\prod_{s\in T}X_s$ 是可分的,从而是 ccc 空间. 另一方面,$\{\prod_{s\in T}W_s^\alpha: \alpha<\omega_1\}$是 Y 内的不空开集组成的互不相交族,它有

个元,矛盾. 证毕.

3.2.12 例 (Bing[1951]的例 G)$\forall\kappa>\omega$,存在 T_2 遗传正规的非 κ-集体正规空间.

证 设 $\kappa>\omega$. 令 $S=P(\kappa)$,$\forall s\in S$,令 $X_s=\{0,1\}$且赋予离散拓扑. $X=\prod_{s\in S}X_s=^S\{0,1\}$表积空间. $p_s:X\to X_s$ 是投射. $\forall\alpha<\kappa$,定义 $f_\alpha\in X$ 如下:$\forall s\in S$,

$$f_\alpha(s)=\begin{cases}1, & \text{当 } \alpha\in s,\\ 0, & \text{当 } \alpha\in\kappa\setminus s.\end{cases}$$

令 $F_0=\{f_\alpha:\alpha<\kappa\}$. 按例 3.2.8 的方式构成的空间 X_{F_0}叫 Bing 的例 G,记为 $F(\kappa)$. 则有

(Ⅰ)每一点 $f\in F(\kappa)$有下列邻域基:

$$\eta(f)=\begin{cases}\{\{f\}\}, & \text{当 } f\in X\setminus F_0,\\ \{B(f_\alpha,T):T\subset S,0<|T|<\omega\}, & \text{当 } f=f_\alpha\in F_0,\end{cases}$$

其中 $B(f_\alpha,T)=\{f\in X:f|T=f_\alpha|T\}$;

(Ⅱ) $F(\kappa)$是 T_2 遗传正规的;

(Ⅲ) $\varphi=\{\{f_\alpha\}:\alpha<\kappa\}$是 $F(\kappa)$内的离散闭集族;

(Ⅳ) $F(\kappa)$不是 κ-集体正规的.

证 (Ⅰ)易知$\forall\alpha<\kappa$,$\forall T=\{s_0,\cdots,s_k\}\subset S$,

$$B(f_\alpha,T)=\bigcap_{i=0}^{k}p_{s_i}^{-1}[O(\alpha,i)].$$

此处

$$O(\alpha,i)=\begin{cases}\{1\}, & \text{当 } \alpha\in s_i,\\ \{0\}, & \text{当 } \alpha\in\kappa\setminus s_i.\end{cases}$$

(Ⅱ) X 显然是 T_2 的,从而 $F(\kappa)=X$ 是 T_2 的. 为证 $F(\kappa)$是遗传正规的,设 $Y\subset F(\kappa)$. Y 作为 $F(\kappa)$的子空间即为 $Y_{(Y\cap F_0)}$. 引用例 3.2.8(Ⅴ),设 A,B 是子空间 $Y\cap F_0\subset X$ 内的不相交闭集. 令

$$s=\{\alpha<\kappa:f_\alpha\in A\},$$

$$U=\bigcup\{B(f_\alpha,\{s\})\cap Y: f_\alpha\in A\},$$
$$V=\bigcup\{B(f_\alpha,\{s\})\cap Y: f_\alpha\in B\}.$$

则 U,V 开于 Y，$A\subset U$，$B\subset V$ 且 $U\cap V=\varnothing$. Y 是正规的.

（Ⅲ）　$\forall f_\alpha\in F_0$，令 $s=\kappa\setminus\{\alpha\}$. 则 $\forall\beta\in\kappa\setminus\{\alpha\}$，

$$B(f_\alpha,\{s\})\cap\{f_\beta\}=\varnothing.$$

故 φ 在 f_α 是离散的，从而 φ 是 $F(\kappa)$ 内的离散闭集族.

（Ⅳ）　反证. 若 $F(\kappa)$ 是 κ-集体正规的，由（Ⅲ）知，$F(\kappa)$ 内有互不相交开集族 $\{V_\alpha: \alpha<\kappa\}$，使得 $f_\alpha\in V_\alpha$. 据例 3.2.8（Ⅰ），设 $V_\alpha=U_\alpha\cup A_\alpha$. 此处 U_α 开于 X 且 $A_\alpha\subset X\setminus F_0$. 则

$$\forall\alpha<\kappa, f_\alpha\in V_\alpha\setminus A_\alpha\subset U_\alpha\subset V_\alpha.$$

于是 $\xi=\{U_\alpha: \alpha<\kappa\}$ 是 X 内不空开集组成的互不相交族，且 $|\xi|=\kappa>\omega$. 另一方面，据 3.2.11，X 是 ccc 空间，矛盾. 证毕.

上例表明存在 T_2 正规的非完满正规空间. 正规与完满正规空间之间有下列基本关系.

3.2.13　引理　对任意空间 X，下列各条等价：

（Ⅰ）　X 是完满正规的；

（Ⅱ）　X 是集体正规和仿紧的；

（Ⅲ）　X 是正规仿紧的；

证　（Ⅰ）→（Ⅱ）与（Ⅱ）→（Ⅲ）显然.

（Ⅲ）→（Ⅰ）　设 $\xi=\{U_s: s\in S\}$ 是正规仿紧空间 X 的开覆盖. ξ 有一个局部有限的精确开加细 $\eta=\{V_s: s\in S\}$. 则 $V_s\subset U_s$. η 有一个收缩 $\zeta=\{W_s: s\in S\}$，则 $\overline{W}_s\subset V_s$. $\forall x\in X$，$\exists G_x\in N(x)$，使得 $S(x)=\{s\in S: G_x\cap V_s\neq\varnothing\}$ 是有限的. 令

$$A(x)=\{s\in S(x): x\in V_s\},$$
$$B(x)=\{s\in S(x): x\notin\overline{W}_s\}.$$

则 $S(x)=A(x)\cup B(x)$. 令

$$H_x=G_x\cap(\bigcap_{x\in A(x)}V_x)\cap\bigcap_{x\in B(x)}(X\setminus\overline{W}_x).$$

则 $H_x\in N(x)$ 且易知，$\{H_x : x\in X\}$ 是 ξ 的点星形开加细，X 是完满正规的．证毕．

3.2.14　引理　(Starbird[1974])设 C 是 T_1 正则空间，则 $\forall\alpha<W(C)\forall i<2$，$C$ 有子集 $A_{\alpha i}$ 与 $U_{\alpha i}$ 合下列条件：$\forall\alpha<w(C)$，

(a)　$A_{\alpha i}$ 是闭集且 $A_{\alpha i}\subset U_{\alpha i}$，$i<2$；

(b)　$U_{\alpha 0}$ 与 $U_{\alpha 1}$ 是不相交的开集；

(c)　$\forall\beta<\alpha$，$A_{\alpha 0}\not\subset U_{\beta 0}$ 或 $A_{\alpha 1}\not\subset U_{\beta 1}$．

证　对 $\alpha<w(C)$ 用归纳法，当 $\alpha=0$ 时，令 $A_{\alpha i}=U_{\alpha i}=\varnothing$，$i<2$．现设 $\alpha<w(C)$，使得 $\forall\beta<\alpha$，$A_{\beta i}$ 与 $U_{\beta i}$ 已构成且合(a)—(c)．由于 $\alpha<w(C)$，$\{U_{\beta 0} : \beta<\alpha\}$ 不是 C 的基，因而 $\exists x\in C\exists W\in N(x)$，使得 $\forall\beta<\alpha$，若 $x\in U_{\beta 0}$，则 $U_{\beta 0}\not\subset W$．定义 $A_{\alpha 0}=\{x\}$，$A_{\alpha 1}=C\setminus W$．因 C 是正则的，存在不相交的开集 $U_{\alpha 0}$ 与 $U_{\alpha 1}$，使得 $A_{\alpha i}\subset U_{\alpha i}$，$i<2$．设 $\beta<\alpha$，若 $A_{\alpha 0}\subset U_{\beta 0}$，即 $x\in U_{\beta 0}$，则有 $U_{\beta 0}\not\subset W$．于是

$$\varnothing\neq U_{\beta 0}\cap A_{\alpha 1}\subset(C\setminus U_{\beta 1})\cap A_{\alpha 1}.$$

从而 $A_{\alpha 1}\not\subset U_{\beta 1}$．归纳法完成．证毕．

3.2.15　定理　(Rudin[1975])设 C 是 T_2 紧空间且 $X\times C$ 是正规空间，则 X 是 $w(C)$-集体正规空间．

证　令 $w(C)=\kappa$．由 3.2.14 引理知，$\forall\alpha<\kappa$，$\forall i<2$，C 有子集 $A_{\alpha i}$ 与 $U_{\alpha i}$ 合该引理的条件(a)—(c)．设 $\{F_\alpha : \alpha<\kappa\}$ 是 X 内的离散闭集族，则 $\{F_\alpha\times A_{\alpha 0} : \alpha<\kappa\}$ 与 $\{F_\alpha\times(C\setminus U_{\alpha 0}) : \alpha<\kappa\}$ 皆是 $X\times C$ 内的离散闭集族，从而

$$K_0=\bigcup_{\alpha<\kappa}(F_\alpha\times A_{\alpha 0})\text{ 与 }L_0=\bigcup_{\alpha<\kappa}(F_\alpha\times(C\setminus U_{\alpha 0}))$$

是正规空间 $X\times C$ 内的不相交闭集．$X\times C$ 内有不相交的开集 P_0 与 Q_0 使得 $K_0\subset P_0$ 且 $L_0\subset Q_0$．

$\forall\alpha<\kappa$，令

$$P_{\alpha 0}=X\setminus p_X((X\times A_{\alpha 0})\setminus P_0),$$

$$Q_{\alpha 0}=X\setminus p_X((X\times (C\setminus U_{\alpha 0}))\setminus Q_0).$$

因投射 $p_x: X\times C\to X$ 是闭的，每个 $P_{\alpha 0}$ 与 $Q_{\alpha 0}$ 开于 X. 易知，$\forall\alpha<\kappa$，有

$$F_\alpha\subset P_{\alpha 0}\cap Q_{\alpha 0}, \tag{1}$$

$$P_{\alpha 0}\times A_{\alpha 0}\subset P_0, Q_{\alpha 0}\times (C\setminus U_{\alpha 0})\subset Q_0. \tag{2}$$

其次，

$$\{F_\alpha\times A_{\alpha 1}: \alpha<\kappa\}\text{与}\{F_\alpha\times (C\setminus U_{\alpha 1}): \alpha<\kappa\}$$

是 $X\times C$ 内的离散闭集族，从而

$K_1=\bigcup_{\alpha<\kappa}(F_\alpha\times A_{\alpha 1})$，$L_1=\bigcup_{\alpha<\kappa}(F_\alpha\times (C\setminus U_{\alpha 1}))$是 $X\times C$ 内不相交的闭集. $X\times C$ 内有不相交的开集 P_1 与 Q_1，使得 $K_1\subset P_1$，$L_1\subset Q_1$.

$\forall\alpha<\kappa$，令

$$P_{\alpha 1}=X\setminus p_X(X\times A_{\alpha 1})\setminus P_1),$$

$$Q_{\alpha 1}=X\setminus p_X((X\times (C\setminus U_{\alpha 1}))\setminus Q_1).$$

则每个 $P_{\alpha 1}$，$Q_{\alpha 1}$都开于 X，. $\forall\alpha<\kappa$ 有

$$F_\alpha\subset P_{\alpha 1}\cap Q_{\alpha 1}, \tag{3}$$

$$P_{\alpha 1}\times A_{\alpha 1}\subset P_1, Q_{\alpha 1}\times (C\setminus U_{\alpha 1})\subset Q_1. \tag{4}$$

$\forall\alpha<\kappa$，$H_\alpha=P_{\alpha 0}\cap P_{\alpha 1}\cap Q_{\alpha 0}\cap Q_{\alpha 1}$开于 X，且由(1)和(3)知，$F_\alpha\subset H_\alpha$. 若$\exists\beta<\alpha<\kappa$，使得$\exists x\in H_\alpha\cap H_\beta$，则由 3.2.14 引理知，$A_{\alpha 0}\not\subset U_{\beta 0}$或 $A_{\alpha 1}\not\subset U_{\beta 1}$. 不妨设$\exists y\in A_{\alpha 0}\cap (C\setminus U_{\beta 0})$，则由(2)知，

$(x,y)\in (P_{\alpha 0}\times A_{\alpha 0})\cap (Q_{\beta 0}\times (C\setminus U_{\beta 0}))\subset P_0\cap Q_0=\varnothing$. 矛盾，故 $\{H_\alpha: \alpha<\kappa\}$是 X 内的互不相交开集族，X 是 κ-集体正规的. 证毕.

3.2.16　定义　空间 X 的子集族$\{A_s: s\in S\}$是**遗传闭包保持的**，如果$\forall s\in S$ $\forall B_s\subset A_s$，族$\{B_s: s\in S\}$是闭包保持的.

显然，局部有限族是遗传闭包保持的，反之不然.

3.2.17　定理　(Rudin[1975])设基数 $\kappa>2$. $\forall\lambda<\kappa$，X 是 λ-集

体正规空间．若 η 是 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖且有一个遗传闭包保持闭加细，则 η 有局部有限闭加细．

证 设 $\eta=\{V_\alpha:\alpha<\kappa\}$，又设 φ 是 η 的遗传闭包保持闭加细．不妨设 $\varphi=\{G_\alpha:\alpha<\kappa\}$，使得 $\forall\alpha<\kappa, G_\alpha\subset V_\alpha$．令 $S=[\kappa]^{<\omega}\setminus\{\varnothing\}$．

论断 1 $\forall\alpha<\kappa$，X 有子集族 $\varphi_\alpha=\{G_{\alpha s}:s\in S\}$ 合下列条件：

(1) $\bigcup_{s\in S}G_{\alpha s}=G_\alpha$．

(2) φ_α 是局部有限闭集族．

(3) 若 $\beta<\alpha$ 且 $G_{\beta t}\cap G_{\alpha s}\neq\varnothing$，则 $s\subset t$．

(4) 若 $G_{\alpha t}\cap G_{\alpha s}\neq\varnothing$，则 $s\subset t$ 或 $t\subset s$．

(5) $\forall\delta\in s\in S, G_{\alpha s}\subset V_\delta$．

(6) $\forall s\not\subset\alpha+1, G_{\alpha s}=\varnothing$．

证 对 α 用归纳法，当 $\alpha=0$ 时，令 $G_{0\{0\}}=G_0$，$\forall s\neq\{0\}$，令 $G_{0s}=\varnothing$．则 $\varphi_0=\{G_{0s}:s\in S\}$ 合条件(1)—(6)．

现设 $0<\gamma<\kappa$ 且设 $\forall\alpha<\gamma$ 已构成 φ_α 合条件(1)—(6)，$\varphi_\alpha=\{G_{\alpha s}:s\in S\}$．下面来构造集族 $\varphi_\gamma=\{G_{\gamma s}:s\in S\}$．令

$$T=\{s\in S:s\subset\gamma\}, F_s=\bigcup_{\alpha<\gamma}G_{\alpha s}, s\in T.$$

则有

(2*) $\{F_s:s\in T\}$ 是局部有限闭集族．

(4*) $\forall s,t\in T$，若 $F_s\cap Ft\neq\varnothing$，则 $s\subset t$ 或 $t\subset s$．

(5*) $\forall\delta\in s\in T, F_s\subset V_\delta$．

事实上，由归纳法假设(5)知(5*)真．若 $F_s\cap F_t\neq\varnothing$，则 $\exists\alpha,\beta<\gamma$ 使得 $G_{\alpha s}\cap G_{\beta t}\neq\varnothing$，由(3)，(4)知(4*)真．现证(2*)．设 $x\in X$，又设 $\alpha<\kappa$ 是使 $x\in G_\alpha$ 的最小者．

情形 I 当 $\gamma\leqslant\alpha$ 时，由 α 的定义知，$W=X\setminus\bigcup_{\beta<\gamma}G_\beta\in N(x)$．$\forall s\in T$ $\forall\beta<\gamma$，由(1)可知，$G_{\beta s}\subset G_\beta$，$F_s\subset\bigcup_{\beta<\gamma}G_\beta$ 从而 $W\cap F_s=\varnothing$．

情形 II 当 $\alpha<\gamma$ 时，$\forall\beta<\gamma$，

若 $\beta<\alpha$，令 $J_\beta=G_\beta$，则 $x\notin\bigcup_{\beta<\alpha}J_\beta$.

若 $\beta=\alpha<\gamma$，$x\in G_\alpha=\bigcup_{s\in S}G_{\alpha s}$，由(2)知 $(\varphi_\alpha)_x=\{G_{\alpha s_0},\cdots,G_{\alpha s_n}\}$ 是不空有限族. 令 $t=s_0\cup\cdots\cup s_n$，则由(3)知，当 $\beta\geqslant\alpha$ 时，$(\varphi_\beta)_x\subset\{G_{\beta s}:s\in S,s\subset t\}$. 令 $J_\beta=\bigcup\{G_{\beta s}:s\in S,s\not\subset t\}$，则 $J_\beta\subset G_\beta$ 且 $x\notin J_\beta$. 由(2)知，J_β 是闭集. 因为 $\{G_\beta:\beta<\kappa\}$ 是遗传闭包保持的，$W=X\setminus\bigcup_{\beta<\gamma}J_\beta\in N(x)$. 幂集 $P(t)$ 有限，且易知，$\forall s\in T\setminus P(t)$，$W\cap F_s=\varnothing$. $\{F_s:s\in T\}$ 是局部有限的. $\forall\alpha<\gamma$，$G_{\alpha s}\subset G_\alpha$，$G_{\alpha s}$ 是闭集，故 $F_s=\bigcup_{\alpha<\gamma}G_{\alpha s}$ 是闭集. (2^*) 真.

$\forall n\in N$，令 $T_n=[T]^n$，则 $T=\bigcup_{n\in N}T_n$. 为了完成论断 1 的证明，需证下列论断.

论断 2　$\forall s\in T$　$\exists M_s$ 开于 X 且合下列条件：

$\forall n\in N$，

(1′)　$\forall s\in T_n\forall t\in\bigcup_{i<n}T_i$，若 $F_s\cap\overline{M}_t\neq\varnothing$，则 $t\subset s$.

(2′)　$\{\overline{M}_s:s\in T_n\}$ 是离散的.

(3′)　$\forall s\in T_n$，$F_s\subset M_s$.

(4′)　$\forall s\in T_n\forall t\in\bigcup_{i<n}T_i$，若 $\overline{M}_s\cap\overline{M}_t\neq\varnothing$，则 $t\subset s$.

(5′)　$\forall s\in T_n\forall\delta\in s$，$\overline{M}_s\subset V_\delta$.

证　在 n 上用归纳法. 当 $n=1$ 时，$\forall s\in T_1$，$A_s=\bigcup_{\delta\in s}V_\delta$ 是开集. 由 (5^*) 知，$F_s\subset A_s$. $\forall t\in T_1$，若 $s\not\subset t$，则 $t\not\subset s$. 由 (4^*) 知，$F_s\cap F_t=\varnothing$. 则 $C_s=X\setminus\bigcup\{F_t:t\in T_1,s\not\subset t\}$ 是开集，使得 $F_s\subset C_s$. 由 (2^*) 及 (4^*) 知，$\{F_s:s\in T_1\}$ 是离散闭集族且 $|T_1|=|\gamma|<\kappa$. 由定理假设知，X 有离散开集族 $\{M_s:s\in T_1\}$，使得 $\forall s\in T_1$，$F_s\subset M_s\subset\overline{M}_s\subset A_s\cap C_s$. 则 $n=1$ 时(1′)—(5′)真.

现设 $n\in N$，使得 $\forall s\in\bigcup_{i<n}T_i$，$M_s$ 已构成且合条件(1′)—(5′). 下面来构造 $\{M_s:s\in T_n\}$. $\forall s\in T_n$，定义

$$A_s=\bigcap_{\delta\in s}V_\delta,$$

$$B_s=X\setminus\bigcup\{\overline{M}_t:t\in\bigcup_{\alpha<\kappa}T_\alpha,t\not\subset s\},$$

$$C_s=X\setminus\bigcup\{F_t:t\in T_\alpha,s\not\subset t\}.$$

显然，A_s 是开集．由(5*)知，$F_s\subset A_s$．由归纳法假设(2′)知，B_s 是开集．由(1′)知，$F_s\subset B_s$．由(2*)知，C_s 是开集．由(4*)知 $F_s\subset C_s$．则有

$$F_s\subset A_s\cap B_s\cap C_s.$$

由(2*)及(4*)知，$\{F_s:s\in T_\alpha\}$ 是离散闭集族．由于 $|T_\alpha|<\kappa$，X 内有离散开集族 $\{M_s:s\in T_\alpha\}$，使得 $\forall s\in T_\alpha$，

$$F_s\subset M_s\subset\overline{M}_s\subset A_s\cap B_s\cap C_s.$$

于是(2′)和(3′)真．由 $\overline{M}_s\subset A_s$ 知，(5′)真．由 $\overline{M}_t\subset C_t$ 知，(1′)真．由 $\overline{M}_s\subset B_s$ 知，(4′)真．归纳法完成，论断 2 真．

下面继续证明论断 1．

$\forall s\in T$，$F_s\subset M_s$．则有开集 L_s 和 N_s，使得

$$F_s\subset L_s\subset\overline{L}_s\subset N_s\subset\overline{N}_s\subset M_s.$$

令 $L=\bigcup_{s\in T}L_s$，$F=\bigcup_{s\in T}F_s$．由(2*)知，F 是闭集．于是存在开集 Q，使得 $F\subset Q\subset\overline{Q}\subset L$．$\forall s\in T$，令

$$Q_s=Q\cap(M_s\setminus\bigcup\{\overline{L}_t:t\in T,t\subsetneqq s\}),$$

$$K_s=F\cap(\overline{N}_s\setminus\bigcup\{N_t:t\in T,t\subsetneqq s\}).$$

则 Q_s 是开集，K_s 是闭集．设开集 R_s，使得

$$K_s\subset R_s\subset\overline{R}_s\subset Q_s.$$

$\forall x\in Q$，$x\in L$，$\exists s\in T$，使得 $x\in\overline{L}_s$ 且 $|s|$ 最小．又 $x\in\overline{L}_s\subset M_s$，则 $x\in Q\cap(M_s\setminus\bigcup\{\overline{L}_t:t\subsetneqq s\})=Q_s$．结果有 $Q=\bigcup_{s\in T}Q_s$．同理有 $F=\bigcup_{s\in T}K_s$．

现证 $\{Q_s:s\in T\}$ 是局部有限开集族．这只需证对 $x\in\overline{Q}$ 的点局部有限．事实上，$x\in\overline{Q}\subset L$，$\exists t\in T$，$x\in L_t\in N(x)$．若 $L_t\cap Q_s\neq\varnothing$，因

为 $L_t \subset M_t$，$Q_s \subset M_s$，由(2′)知，$|t| \neq |s|$，由(4′)知 $s \subset t$ 或 $t \subset s$. 若 $t \subsetneqq s$，$Q_s \cap L_t = \varnothing$，矛盾. 故 $s \subset t$. 这种 s 只有有限多个. 因此 $\{Q_s : s \in T\}$ 是局部有限的.

现在我们来完成论断 1 中归纳法的最后一步，即构造 $\varphi_\gamma = \{G_{\gamma s} : s \in S\}$. 定义

$$G_{\gamma s} = \varnothing，当 s \not\subset \gamma + 1 时，$$

$$G_{\gamma\{\gamma\}} = G_\gamma \setminus Q，当 s = \{\gamma\} 时，$$

$$G_{\gamma s} = G_\gamma \cap (\overline{R}_s \setminus \bigcup \{R_t : t \in T, t \subsetneqq s\})，当 s \in T 时，$$

$$G_{\gamma(s \cup \{\gamma\})} = G_\gamma \cap [\overline{Q}_s \setminus \bigcup \{Q_t : t \supsetneqq s\}) \setminus \bigcup_{t \in T} R_t]，当 s \in T 时.$$

只需证明 φ_γ 合(1)—(6)各条.

考虑(1)　设 $p \in G_\gamma$. 若 $p \in \bigcup_{s \in T} R_s$，$\exists s \in T$，使得 $p \in R_s$ 且 $|s|$ 最小. 则 $p \in \overline{R}_s \setminus \bigcup_{t \subsetneqq s} R_t$，$p \in G_{\gamma s}$. 若 $p \in Q \setminus \bigcup_{s \in T} R_s$，因 $\{Q_s : s \in T\}$ 是局部有限的且覆盖 Q，$\exists s \in T$，使得 $p \in Q_s$ 且 $|s|$ 最大. 则 $p \in (\overline{Q}_s \setminus \bigcup_{t \supsetneqq s} Q_t) \setminus \bigcup_{s \in T} R_s$，从而 $p \in G_{\gamma(s \cup \{\gamma\})}$. 若 $p \notin \bigcup_{s \in T} R_s$ 且 $p \notin (Q \setminus \bigcup_{s \in T} R_s)$，则 $p \in G_\gamma \setminus Q = G_{\gamma\{\gamma\}}$. 故 $G_\gamma = \bigcup_{s \in S} G_{\gamma s}$.

考虑(2)　由定义知，每个 $G_{\gamma s}$ 是闭集. $\forall s \in T$，$\overline{R}_s \subset Q_s$ 且 $\{\overline{Q}_s : s \in T\}$ 是局部有限的. 于是显然 $\{G_{\gamma s} : s \in S\}$ 是局部有限闭集族.

考虑(3)　设 $\beta < \gamma$ 且 $s, t \in S$，使得 $\exists p \in G_{\beta t} \cap G_{\gamma s}$. 需证 $s \subset t$. 因 $p \in G_{\beta t}$，$\beta < \gamma < \kappa$. 由归纳法假设(5)知，$t \subset \beta + 1 \subset \gamma$，$t \in T$. 同理，由 $p \in G_{\gamma s}$ 知，$s \subset \gamma + 1$. $p \in G_{\beta t} \subset F_t \subset F \subset Q$，$p \notin G_{\gamma\{\gamma\}}$，故知 $s \neq \{\gamma\}$. 又 $p \in F = \bigcup_{r \in T} K_r \subset \bigcup_{r \in T} R_r$. 则 $\forall s' \in T$，$p \notin G_{\gamma(s' \cup \{\gamma\})}$，$s \neq s' \cup \{\gamma\}$. 结果 $s \in T$. $G_{\gamma s} \subset \overline{R}_s \subset Q_s \subset M_s$. $G_{\beta t} \subset F_t \subset L_t \subset M_t$. $p \in M_t \cap M_s$. 由(2′)知，$|t| \neq |s|$. 据(4′)，$s \subset t$ 或 $t \subset s$. 若 $t \subsetneqq s$，则 $p \in Q_s \cap L_t \subset (X \setminus \overline{L}_t) \cap L_t = \varnothing$，矛盾. 故 $s \subset t$.

考虑(4)　设 $s, t \in S$，使得 $G_{\gamma s} \cap G_{\gamma t} \neq \varnothing$. 考虑下列几种情形：

(a)　若 s,t 中有一个是 $\{\gamma\}$，不妨设 $t=\{\gamma\}$，若 $t\not\subset s$，即 $\gamma\notin s$，则 $s\in T$. 于是

$$G_{\gamma s}\subset\overline{R}_s\subset Q_s\subset Q,$$

$$G_{\gamma s}\cap G_{\gamma\{\gamma\}}\subset Q\cap(X\setminus Q)=\varnothing,$$

矛盾. 故 $t\subset s$.

(b)　若 $s,t\in T$，则 $G_{\gamma t}\subset\overline{R}_t\subset M_t$，$G_{\gamma s}\subset M_s$，$\overline{M}_t\cap\overline{M}_s\neq\varnothing$. 由(2′)与(4′)知，$s\subset t$ 或 $t\subset s$.

(c)　若 $s=r\cup\{\gamma\}$，$t=q\cup\{\gamma\}$，$r,q\in T$. 则 $G_{\gamma s}\subset\overline{Q}_r\subset\overline{M}_r$，$G_{\gamma t}\subset\overline{M}_q$，$\overline{M}_r\cap\overline{M}_q\neq\varnothing$. 于是 $r\subset q$ 或 $q\subset r$，从而 $s\subset t$ 或 $t\subset s$.

(d)　若 $s=r\cup\{\gamma\}$，$r\in T$，$t\in T$(或 $t=q\cup\{\gamma\}$，$q\in T$，$s\in T$，证法相同)，则 $G_{\gamma t}\subset\overline{R}_t\subset Q_t\subset M_t$，$G_{\gamma s}\subset\overline{Q}_r\subset\overline{M}_r$，$\overline{M}_t\cap\overline{M}_r\neq\varnothing$. $r\subset t$ 或 $t\subset r$. 若 $r\subsetneqq t$，则

$$G_{\gamma s}\cap G_{\gamma t}\subset(X\setminus\bigcup_{t\subsetneqq\gamma}Q_t)\cap Q_t=\varnothing,$$

矛盾，故 $t\subset r\subset s$.

考虑(5)　设 $\delta\in s\in S$. 若 $s\in T$，由(5′)知，$G_{\gamma s}\subset\overline{R}_s\subset M_s\subset V_\delta$. 若 $\exists t\in T$，$s=t\cup\{\gamma\}$. 若 $\delta\neq\gamma$，则 $\delta\in t$. 据(5′)有

$$G_{\gamma s}\subset\overline{Q}_t\subset\overline{M}_t\subset V_\delta.$$

若 $\delta=\gamma$，由已证的(1)知，$G_{\gamma s}\subset G_\gamma=G_\delta\subset V_\delta$. 若 $s=\{\gamma\}$，则 $\delta=\gamma$，同上有 $G_{\gamma s}\subset V_\delta$. 若 $s\not\subset\gamma+1$，则 $G_{\gamma s}=\varnothing\subset V_\delta$.

考虑(6)　若 $s\not\subset\gamma+1$，由定义知，$G_{\gamma s}=\varnothing$.

于是归纳法完成，论断 1 真.

$\forall s\in S$，定义 $H_s=\bigcup_{\alpha<\kappa}G_{\alpha s}$. 若能证 $\{H_s: s\in S\}$ 是 η 的局部有限闭加细. 则定理即得证.

事实上，设 $x\in X$，则存在最小的 $\alpha<\kappa$，使得 $\alpha\in G_\alpha$. $\forall\beta<\kappa$，若 $\beta<\alpha$，$x\notin G_\beta$. 令 $J_\beta=G_\beta$，则 $x\notin\bigcup_{\beta<\alpha}J_\beta$. 若 $\beta\geqslant\alpha$，因 $x\in G_\alpha$ 且 $\varphi_\alpha=\{G_{\alpha s}: s\in S\}$ 是局部有限的，$(\varphi_\alpha)_x=\{G_{\alpha s_0},\cdots,G_{\alpha s_n}\}$ 是不空有限族. 令 $t=s_0$

$\bigcup\cdots\bigcup s_n$. 则当 $\beta\geqslant\alpha$ 时，$(\varphi_\beta)_x\subset\{G_{\beta s}: s\in S, s\subset t\}$，令

$$J_\beta=\bigcup\{G_{\beta s}: s\in S, s\not\subset t\}.$$

则 $x\notin J_\beta$ 且由(2)知，J_β 是闭集．因 $\{G_\beta: \beta<\kappa\}$ 是遗传闭包保持的，且每个 $J_\beta\subset G_\beta$，$\bigcup\limits_{\beta<\kappa}J_\beta$ 是不含 x 的闭集．$W=X\setminus\bigcup\limits_{\beta<\kappa}J_\beta\in N(x)$．幂集 $P(t)$ 是有限的．易知 $\forall s\in S\setminus P(t)$，$W\cap H_s=\varnothing$．$\{H_s: s\in S\}$ 是局部有限的．又由假设及(1)，(2)知，$\{G_{\alpha s}: \alpha<\kappa\}$ 是闭包保持闭集族，$H_s=\bigcup\limits_{\alpha<\kappa}G_{\alpha s}$ 是闭集．$\forall s\in S$，取 $\delta\in s$．由(5)知 $\forall\alpha<\kappa$，$G_{\alpha s}\subset V_\delta$，从而 $H_s\subset V_\delta$．$\forall x\in X\exists\alpha<\kappa$，使得 $x\in G_\alpha$，据(1)，$\exists s\in S$，$x\in G_{\alpha s}\subset H_s$，$\{H_s: s\in S\}$ 是 η 的局部有限闭加细，证毕．

3.2.18　定理(Rudin[1975])设 C 是 T_2 紧空间，$X\times C$ 是正规空间且 $f: X\to Y$ 是闭的满映射．则 $Y\times C$ 是正规的．

证　当 C 有限时定理显然真．下设 C 无限．设 K_0, K_1 是 $Y\times C$ 内的不相交闭集．$\xi=\{H(K,B_\alpha): \alpha<\kappa\}$ 是 Y 的关于 $K=(K_0,K_1)$ 的 $\eta(C)$-覆盖．此处基 $\eta(C)$ 及族 $\{B_\alpha=(B_\alpha^0,B_\alpha^1): \alpha<\kappa\}$ 如 3.1.16 中所定义，$\kappa=|\eta(C)|=w(C)$，且

$$H(K,B_\alpha)=Y\setminus P_Y\left[\bigcup_{i<2}(K_i\setminus(Y\times B_\alpha^i))\right]$$

其中 $P_Y: Y\times C\to Y$ 表投射．其次，

$$f\times id_C: X\times C\to Y\times C$$

连续．令 $L_i=(f\times id_C)^{-1}[K_i]$，$i<2$．则易见 L_0 与 L_1 是 $X\times C$ 内的不相交闭集．设

$$\varphi=\{H(L,B_\alpha): \alpha<\kappa\}$$

是 X 的关于 $L=(L_0,L_1)$ 的 $\eta(C)$-覆盖，其中

$$H(L,B_\alpha)=X\setminus P_X\left[\bigcup_{i<2}(L_i\setminus(X\times B_\alpha^i))\right].$$

而 $P_X: X\times C\to X$ 表投射．由于 $X\times C$ 是正规的，据 3.1.19，φ 有一个局部有限闭的精确加细 $\zeta=\{F_\alpha: \alpha<\kappa\}$，$F_\alpha\subset H(L,B_\alpha)$．易知 $\zeta'=\{f[F_\alpha]: \alpha<\kappa\}$ 是 Y 的遗传闭包保持闭覆盖，并且 $\forall\alpha<\kappa$，

$$f[F_\alpha]\subset f[H(L,B_\alpha)]=H(K,B_\alpha).$$

Y 的势$\leqslant\kappa$的开覆盖 ξ 有遗传闭包保持闭加细 ζ'. 因 $X\times C$ 正规，由 3.2.15 知，X 是 κ-集体正规的. 易知，它的闭连续像 Y 也是 κ-集体正规的(见习题 3.G). 则$\forall\lambda<\kappa$，Y 是 λ-集体正规的. 据 3.2.17，ξ 有局部有限闭加细. 据 3.1.19，$Y\times C$ 是正规的. 证毕.

3.2.19　引理　设 $\xi=\bigcup_{n<\omega}\xi_n$ 是空间 X 的开覆盖，使得每个 ξ_n 是局部有限的且 $\bigcup\xi_n$ 是函数开集，则 ξ 有局部有限开加细.

证　$\{\bigcup\xi:n<\omega\}$是 X 的可数的函数开覆盖. 据 2.4.10，它有一个星形有限函数开的精确加细$\{V_n:n<\omega\}$，则 $V_n\subset\xi_n$. 于是

$$\{V_n\cap U:n<\omega,U\in\xi_n\}$$

就是 ξ 的局部有限开加细. 证毕.

3.2.20　引理　设$\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$是 κ-集体正规空间 X 内的开集族且$\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是 X 内的离散闭集族，使得 $F_\alpha\subset U_\alpha$，$\alpha<\kappa$. 则 X 内有离散开集族 $\eta=\{V_\alpha:\alpha<\kappa\}$，使得$\bigcup\eta$ 是函数开集且 $F_\alpha\subset V_\alpha\subset U_\alpha$，$\alpha<\kappa$.

证　因 X 是 κ-集体正规的，存在离散开集族$\{G_\alpha:\alpha<\kappa\}$，使得 $F_\alpha\subset G_\alpha$. 令

$$A=\bigcup\{F_\alpha:\alpha<\kappa\},B=X\setminus\bigcup\{G_\alpha\cap U_\alpha:\alpha<\kappa\}.$$

则 A 与 B 是不相交的闭集，因 X 是正规的，存在连续函数 $f:X\to I$，使得

$$f[A]\subset\{1\},f[B]\subset\{0\}.$$

令 $H=f^{-1}[(0,1]]$. 则 $A\subset H\subset X\setminus B$. 令 $V_\alpha=H\cap G_\alpha\cap U_\alpha$，$\alpha<\kappa$，则 $\eta=\{V_\alpha:\alpha<\kappa\}$就是 X 内的离散开集族，使得$\bigcup\eta=H$ 是函数开集且 $F_\alpha\subset V_\alpha\subset U_\alpha$，$\alpha<\kappa$. 证毕.

为了简化记号，今后序数和 $\alpha\oplus\beta$ 与积 $\alpha\odot\beta$ 分别记为 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha\cdot\beta$.

在刘[1977]中，引入并研究了一类包含次亚紧空间类（从而包含仿紧空间类）的空间，叫狭义拟仿紧空间，我们将在第四章中介绍它的有趣性质．这一概念如下：

3.2.21　定义　（Ⅰ）　设$\forall n<\omega$，φ_n是X的子集族．称族$\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$是**$\sigma$-相对离散（$\sigma$-相对离散相对闭）的**，如果$\forall n<\omega$，$\varphi_n$是子空间$X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i)$内的离散子（闭）集族．注意：当$n=0$时，$\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i)=\varnothing$．

（Ⅱ）　空间X的开覆盖ξ称为一个**d-覆盖**，如果ξ-有一个σ-相对离散相对闭加细．

（Ⅲ）　（刘[1977]）设基数$\kappa\geqq\omega$，空间X是**κ-狭义拟仿紧的**，如果它的每个势$\leqq\kappa$的开覆盖是d-覆盖；X是**k-拟仿紧的**，如果它的每个势$\leqslant\kappa$的开覆盖有一个σ-相对离散的加细；X是**狭义拟仿紧的**，如果对每个$\kappa\geqslant\omega$，X是κ-（狭义）拟仿紧的．

3.2.22　引理　设$\xi=\{U_s:s\in S\}$是空间X的开覆盖，则下列各条等价：

（Ⅰ）　ξ是X的d-覆盖；

（Ⅱ）　ξ有一个加细$\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，使得$\forall n<\omega$，$\varphi_n=\{F_{ns}:s\in S\}$是子空间$X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i)$内的离散闭集族，使得$F_{ns}\subset U_s$，$s\in S$；

（Ⅲ）　ξ有一个加细$\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，使得$\forall n<\omega$，$\varphi_n|(X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i))$是子空间$X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i)$内的离散闭集族．

3.2.23　定理　设基数$\kappa\geqslant\omega$，对任意空间X，下列各条等价：

（Ⅰ）　X是κ-集体正规的；

（Ⅱ）　X是正规的且X的每个势$\leqslant\kappa$的d-覆盖有局部有限开加细；

（Ⅲ）　X的每个势$\leqslant\kappa$的开覆盖是正规的；

（Ⅳ）　X的每个势$\leqslant\kappa$的开覆盖有点星形开加细；

（V） X 的每个势$\leqslant\kappa$的开覆盖有点星形半开加细；

证 （I）→（II） 设 $\xi=\{U_\alpha : \alpha<\kappa\}$ 是 κ-集体正规空间 X 的势$\leqslant\kappa$的 d-覆盖．则 ξ 有一个加细 $\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，使得 $\forall n<\omega$，$\varphi_n=\{F_{n\alpha} : \alpha<\kappa\}$ 是 $X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i)$ 内的离散闭集族且 $F_{n\alpha}\subset U_\alpha$，$\alpha<\kappa$. 先证下面论断.

论断 1 $\forall n<\omega$ 存在 X 的子集族 η_n 满足条件：

（a） $\eta_n=\{V_{n\alpha} : \alpha<\kappa\}$ 是离散开集族，使得 $V_{n\alpha}\subset U_\alpha$，$\alpha<\kappa$；

（b） $\bigcup\eta_n$ 是函数开集；

（c） $\bigcup_{i\leqslant n}(\bigcup\varphi_i)\subset\bigcup_{i\leqslant n}(\bigcup\eta_i)$.

证 因 φ_0 是 X 内的离散闭集族，据 3.2.20，X 内有开集族 $\eta_0=\{V_{0\alpha} : \alpha<\kappa\}$，使得 $\bigcup\eta_0$ 是函数开集且 $F_{0\alpha}\subset V_{0\alpha}\subset U_\alpha$，$\alpha<k$. 则 $\bigcup\varphi_0\subset\bigcup\eta_0$. 现设 $n<\omega$，使得 $\forall i\leqslant n$，已构成 η_i 满足条件（a）—（c），由归纳法假设知，

$$\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i)\subset\bigcup_{i<n}(\bigcup\eta_i).$$

于是 $\varphi_n|(X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\eta_i))$ 是 X 内的离散闭集族且

$$F_{n\alpha}\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\eta_i)\subset F_{n\alpha}\subset U_\alpha.$$

据 3.2.20，X 内有离散开集族 $\eta_n=\{V_{n\alpha} : \alpha<\kappa\}$，使得 $\bigcup\eta_n$ 是函数开集且

$$F_{n\alpha}\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\eta_i)\subset V_{n\alpha}\subset U_\alpha,\ \alpha<\kappa.$$

则 $\bigcup\varphi_n\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\eta_i)\subset\bigcup\eta_n$，于是有

$$\bigcup_{i\leqslant n}(\bigcup\varphi_i)\subset\bigcup_{i<n}(\bigcup\eta_i)\cup\bigcup\eta_n=\bigcup_{i\leqslant n}(\bigcup\eta_i).$$

因此，η_n 满足（a）—（c），由归纳法知论断 1 真.

由（c）知，$\eta=\bigcup_{n<\omega}\eta_n$ 是 X 的开覆盖．由（a），（b）及 3.2.19 知，η 有一个局部有限开加细 γ. 由（a）知，γ 也是 ξ 的局部有限开加细.

（II）→（III） 因正规空间的局部有限开覆盖是正规覆盖.

（III）→（IV）与（IV）→（V）显然.

（V）→（I）　设 $\varphi=\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 内的离散闭集族，令

$$U_\alpha=X\setminus\bigcup\{F_\beta:\beta\in\kappa\setminus\{\alpha\}\},\alpha<\kappa.$$

则开集 $U_\alpha\supset F_\alpha$. $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}\cup\{X\setminus\bigcup\varphi\}$ 是 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖．令 $\varphi_0=\varphi,\varphi_1=\{X\setminus\bigcup\varphi\}$，则 $\varphi_0\cup\varphi_1$ 是 ξ 的 σ-相对离散相对闭加细，从而 ξ 是 X 的 d-覆盖．由假设，ξ 有一个点星形半开加细 η. 令 $V_\alpha=(\mathrm{St}(F_\alpha,\eta))^\circ,\alpha<\kappa$. 则 $F_\alpha\subset V_\alpha$ 且 $\alpha\neq\beta$ 时，$V_\alpha\cap V_\beta=\varnothing$，$X$ 是 κ-集体正规的．证毕．

下面介绍集体正规空间的两种推广．即集体次正规空间与集体 δ-正规空间．它们分别是 Chaber[1979]与 Junnila[1980]中引入的，在下一章研究次仿紧空间时需用．

3.2.24　定义　（I）　设基数 $\kappa\geqslant2$，空间 X 是 **κ-集体次正规的**如果对 X 内任意的离散闭集族 $\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$，$X$ 有可数闭覆盖 $\{C_n:n<\omega\}$，使得 $\forall n<\omega$，子空间 C_n 内有互不相交开集族 $\{U_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}$ 合于 $F_\alpha\cap C_n\subset U_{n\alpha},\alpha<\kappa$.

（II）　空间 X 是**集体次正规的**如果 $\forall\kappa\geqslant2$，X 是 κ-集体次正规的．

（III）　空间 X 是**次正规的**，如果它是 2-集体次正规的．

显然，κ-集体正规空间是 κ-集体次正规的．

3.2.25　引理　完全空间是集体次正规的．

证　设 $\varphi=\{F_s:s\in S\}$ 是完全空间 X 内的离散闭集族．$C_0=\bigcup_{s\in S}F_s$ 是闭集．设 $X\setminus C_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$，每个 C_n 是闭集．则 $\{C_n:n<\omega\}$ 是 X 的可数闭覆盖．$\varphi|C_0=\varphi$ 是 C_0 的离散闭覆盖．从而它也是 C_0 内的互不相交开集族．$\forall n\in N,\varphi|C_n=\{\varnothing\}$，$X$ 是集体次正规的．证毕．

3.2.26　引理　空间 X 是 κ-集体次正规的当且仅当对 X 内每个离散闭集族 $\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$，$X$ 内有一列开集族 $\langle\eta_n=\{V_{n\alpha}:\alpha<$

$\kappa\})_{n<\omega}$，使得$\forall n<\omega\ \forall\alpha<\kappa, F_\alpha\subset V_{n\alpha}$且$\forall x\in X\ \exists n<\omega$，使得$|(\eta_n)_x|\leqslant 1$.

证　($\rightarrow$)设$\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$\kappa$-集体次正规空间$X$内的离散闭集族．则$X$有可数闭覆盖$\{C_n:n<\omega\}$，使得$\forall n<\omega$，$C_n$内有互不相交开集族$\{U_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}$，使得$F_\alpha\cap C_n\subset U_{n\alpha}$．设$U'_{n\alpha}$开于$X$，使得$U_{n\alpha}=U'_{n\alpha}\cap C_n$．令$V_{n\alpha}=U'_{n\alpha}\cup(X\setminus C_n)$．则$\eta_n=\{V_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}$是开集族，使得$F_\alpha\subset V_{n\alpha}$且$\forall x\in X\ \exists n<\omega$，$|(\eta_n)_x|\leqslant 1$.

($\leftarrow$)设$\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$X$内的离散闭集族．由假设，$X$内有一列开集族$(\eta_n=\{V_{n\alpha}:\alpha<\kappa\})_{n<\omega}$满足引理的条件，令

$$C_n=\{x\in X:|(\eta_n)_x|\leqslant 1\},n<\omega.$$

则$\{C_n:n<\omega\}$是X的闭覆盖．令

$$\xi_n=\{V_{n\alpha}\cap C_n:\alpha<\kappa\}.$$

则ξ_n是C_n内的互不相交开集族使得$F_\alpha\cap C_n\subset V_{n\alpha}\cap C_n$，$X$是$\kappa$-集体次正规的．证毕．

3.2.27　定义　(Ⅰ)　设基数$\kappa\geqslant 2$．空间X是**κ-集体δ-正规的**，如果对于X内的任一离散闭集族$\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$，存在互不相交族$\{H_\alpha:\alpha<\kappa\}$，使得$\forall\alpha<\kappa$，$H_\alpha$是$G_\delta$-集且$F_\alpha\subset H_\alpha$.

(Ⅱ)　空间X是**集体δ-正规的**，如果$\forall\kappa\geqslant 2$，X是κ-集体δ-正规的．

(Ⅲ)　空间X是**δ-正规的**，如果它是2-集体δ-正规的．

3.2.28　引理　集体δ-正规空间的闭子空间是集体δ-正规的．

3.2.29　引理　κ-集体次正规空间是κ-集体δ-正规的．

证　设$\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$\kappa$-集体次正规空间$X$内的离散闭集族．则$X$内有一列开集族$(\eta_n=\{V_{n\alpha}:\alpha<\kappa\})_{n<\omega}$，使得$F_\alpha\subset V_{n\alpha}$且$\forall x\in X\exists n<\omega$，$|(\eta_n)_x|\leqslant 1$．不妨设$\alpha\neq\beta$时，$V_{n\alpha}\neq V_{n\beta}$．令$V_\alpha=\bigcap_{n<\omega}V_{n\alpha}$，则$V_\alpha$是包含$F_\alpha$的$G_\delta$集且$\{V_\alpha:\alpha<\kappa\}$是互不相交的，$X$是$\kappa$-集体$\delta$-正规

的. 证毕.

§3.3 可膨胀空间

3.3.1 定义 （Ⅰ） 设基数$\kappa\geqslant\omega$,空间X是**κ-可膨胀**(**κ-离散可膨胀**)的,如果对X内每个局部有限(离散)闭集族$\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$,存在局部有限开集族$\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$,使得$\forall\alpha<\kappa,F_\alpha\subset U_\alpha$.

ω-可膨胀空间又叫**可数可膨胀空间**.

（Ⅱ） 空间X是**可膨胀的**(**离散可膨胀的**),如果$\forall\kappa\geqslant\omega$,$X$是$\kappa$-可膨胀($\kappa$-离散可膨胀)的.

3.3.2 引理 κ-仿紧空间是κ-可膨胀的.

证 设$\varphi=\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$\kappa$-仿紧空间$X$内的局部有限闭集族. 令$S=\{s:s\subset\kappa,|s|<\omega\}$. $\forall s\in S$,令

$$G(s)=X\backslash\bigcup\{F_\alpha:\alpha\in\kappa\backslash s\}.$$

$\forall x\in X$,令$s(x)=\{\alpha<\kappa:x\in F_\alpha\}$,则$x\in G(s(x))$,于是$\eta=\{G(s):s\in S\}$是$X$的开覆盖且$|\eta|\leqslant|S|=\kappa$. η有局部有限开加细$\mathscr{s}$,$\forall\alpha<\kappa$,令$U_\alpha=St(F_\alpha,\mathscr{s})$,则$F_\alpha\subset U_\alpha$,下证$\zeta=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$是局部有限的,于是$X$是$\kappa$-可膨胀的,设$x\in X$,则$\exists V\in N(x)$,$(\xi)_V=\{W_0,\cdots,W_n\}$是有限的,$\forall i\leqslant n\exists s_i\in S,W_i\subset G(s_i)$,令$C=\{\alpha<\kappa:V\cap U_\alpha\neq\varnothing\}$,则$C\subset\bigcup_{i=0}^{n}s_i$,从而$C$是有限的,$\zeta$是局部有限的,证毕.

3.3.3 引理 空间X是可数仿紧的当且仅当X是可数可膨胀的.

证 (→) 由3.3.2知;

(←) 设$\zeta=\{U_n:n<\omega\}$是可数可膨胀空间X的可数开覆盖,令

$$E_0 = U_0, E_n = U_n \setminus \bigcup_{i<n} U_i, \quad n \geqslant 1.$$

$\forall x \in X \ \exists n < \omega, x \in U_n, \forall k \geqslant n,$

$$U_n \cap E_k \subset U_n \cap (X \setminus U_n) = \varnothing.$$

于是$\{\overline{E}_n : n < \omega\}$是局部有限闭集族，设$\{V_n : n < \omega\}$是 X 内的局部有限开集族使得 $\overline{E}_n \subset V_n, n < \omega$，则 $\eta = \{U_n \cap V_n : n < \omega\}$是 ζ 的局部有限开加细，X 是可数仿紧的，证毕.

3.3.4 定义　(Ⅰ)　设 $n \in N$，空间 X 的子集族$\{A_s : s \in S\}$是 **n-局部有限的**，如果$\forall x \in X \ \exists G_x \in N(x)$，使得

$$|\{s \in S : G_x \cap A_s \neq \varnothing\}| \leqslant n.$$

(Ⅱ)　X 的子集族 ζ 是**有界局部有限的**，如果存在 $n \in N$，ζ 是 n-局部有限的.

(Ⅲ)　设 $\kappa \geqslant \omega$. 空间 X 是 **κ-有界可膨胀的**，如果对 X 内每个有界局部有限闭集族$\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$，$X$ 内有局部有限开集族$\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$使得$\forall \alpha < \kappa, F_\alpha \subset U_\alpha$.

(Ⅳ)　空间 X 是**有界可膨胀的**，如果$\forall \kappa \geqslant \omega$，$X$ 是 κ-有界可膨胀的.

3.3.5 定理(Smith and Krajewski[1971])　空间 X 是 κ-有界可膨胀的当且仅当它是 κ-离散可膨胀的.

证　($\Leftarrow$)　设空间 X 是 κ-离散可膨胀的，$\forall n \in N$，让 $P(n)$表命题："对 X 内每个有界局部有限闭集族 $\varphi = \{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$，若

$$O(\varphi) = \sup\{|(\varphi)_x| : x \in X\} \leqslant n,$$

则 X 内有局部有限开集族$\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$，使得$\forall \alpha < \kappa, F_\alpha \subset U_\alpha$."只需证：$\forall n \in N, P(n)$真.

首先证 $P(1)$ 真，事实上，设 $\varphi=\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是有界局部有限闭集族使得 $O(\varphi)\leqslant 1$，则 φ 是离散的（见习题2.A），因 X 是 κ-离散可膨胀的，故 $P(1)$ 真.

设 $n\geqslant 1$ 且 $P(n)$ 真，现证 $P(n+1)$ 真，设 $\varphi=\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 内的有界局部有限闭集族，使得 $O(\varphi)\leqslant n+1$，令 $S=\{s\subset\kappa:|s|=n+1\}$，$\forall s\in S$，令 $E_s=\bigcap\{F_\alpha:\alpha\in s\}$，则 $\zeta=\{E_s:s\in S\}$ 是局部有限闭集族，因 $O(\varphi)\leqslant n+1$，ζ 是互不相交的，于是 ζ 是离散闭集族且 $|\zeta|\leqslant|S|=\kappa$，$X$ 内有局部有限开集族 $\zeta=\{U_s:s\in S\}$，使得 $E_s\subset U_s$，因 $O(\varphi)\leqslant n+1$，$\forall\alpha\in\kappa\backslash s$，$E_s\cap F_\alpha=\varnothing$，故不妨设

$$E_s\subset U_s\subset X\backslash\bigcup\{F_\alpha:\alpha\in\kappa\backslash s\},s\in S. \tag{1}$$

令 $U=\bigcup\{U_s:s\in S\}$，则 $\varphi'\{F_\alpha\backslash U:\alpha<\kappa\}$ 是 X 内的有界局部有限闭集族且 $O(\varphi')\leqslant n$. 由归纳法假设 $P(n)$ 真，故 X 内有局部有限开集族 $\eta=\{V_\alpha:\alpha<\kappa\}$，使得 $F_\alpha\backslash U\subset V_\alpha$，令

$$G_\alpha=V_\alpha\cup\bigcup\{U_s:s\in S,\alpha\in s\}$$

则由(1)知，$F_\alpha\subset G_\alpha$，$\forall x\in X\ \exists H\in N(x)$，使得 $(\eta)_H\subset\{V_{\alpha 0},\cdots,V\ \alpha m\}$ 有限. 又 $\exists O\in N(x)$，使得 $(\zeta)_O\subset\{U_{s0},\cdots,U_{sn}\}$. 则 $\bigcap O\in N(x)$. 令 $C=\{\alpha<\kappa:H\cap O\cap G_\alpha\neq\varnothing\}$. 则

$$C\subset\{\alpha_0,\cdots,\alpha_m\}\cup\bigcup_{j=0}^{n}sj$$

于是 C 有限. 故 $\{G_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是局部有限的. $P(n+1)$ 真. 由归纳法知，X 是 κ-有界可膨胀的. 证毕.

3.3.6　定理　空间 X 是 κ-可膨胀的当且仅当它是可数仿紧的和 κ-离散可膨胀的.

证　(→)　因 κ-可膨胀空间是可数可膨胀的，由3.3.3知.

(←)　设 X 是可数仿紧的和 κ-离散可膨胀空间. $\varphi=\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 内的局部有限闭集族. $\forall n<\omega$，令

$G_n=\{x\in X:\exists H\in N(x),|(\varphi)_H|\leqslant n\}$

则 $\eta=\{G_n:n<\omega\}$是 X 的可数上升开覆盖，因 X 是可数仿紧的，η 有一个收缩$\{U_n:n<\omega\}$. 则 $\overline{U}_n\subset G_n$, $\{U_n:n<\omega\}$又有局部有限的精确开加细$\{W_n:n<\omega\}$，因 X 是可数可膨胀的，X 内有局部有限开集族$\{V_n:n<\omega\}$，使得 $\overline{W}_n\subset U_n\subset G_n$. $\forall n<\omega$, $\{\overline{W}_n\cap F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是 X 内的 n-局部有限闭集族. 由假设及3.3.5知，X 是 κ-有界可膨胀的. 又 $\overline{W}_n\cap F_\alpha\subset V_n$, X 内有局部有限开集族$\{H(n,\alpha):\alpha<\kappa\}$使得 $\overline{W}_n\cap F_\alpha\subset H(n,\alpha)\subset V_n$. 令 $H_\alpha=\bigcup_{n=0}^{\omega}H(n,\alpha)$. 则易知，$\{H_\alpha:\alpha<\kappa\}$是 X 内的局部有限开集族，使得 $F_\alpha\subset H_\alpha$. X 是 κ-可膨胀的. 证毕.

3.3.7 引理 空间 X 是 κ-集体正规的当且仅当 X 是正规的和 κ-离散可膨胀的.

证 (→) 显然

(←) 设$\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是正规 κ-离散可膨胀空间 X 的离散闭集族，则 X 内有局部有限开集族$\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$，使得 $F_\alpha\subset U_\alpha$. 因 X 正规且$\forall\alpha<\kappa$, $F_\alpha\subset U_\alpha\setminus\bigcup\{F_\beta:\beta\neq\alpha\}$，则有开集 V_α，使得

$$F_\alpha\subset V_\alpha\subset\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha\setminus\bigcup\{F_\beta:\beta\neq\alpha\}.$$

令 $W_\alpha=V_\alpha\setminus\bigcup\{\overline{V}_\beta:\beta\neq\alpha\}$. 因$\{V_\alpha:\alpha<\kappa\}$是局部有限的，$W_\alpha$ 是开集. 易见$\{W_\alpha:\alpha<\kappa\}$是互不相交开集族，使得$\forall\alpha<\kappa$, $F_\alpha\subset W_\alpha$. X 是 κ-集体正规的. 证毕.

3.3.8 定理 (Katětov[1958])空间 X 是正规 κ-可膨胀的当且仅当它是可数仿紧 κ-集体正规的.

证 (→) 设 X 是正规 κ-可膨胀的空间. 由3.3.6知，X 是可数仿紧且 κ-离散可膨胀的，再由3.3.7知，X 是 κ-集体正规的.

(←) 由3.3.6和≥.3.7可知，X 是正规 κ-可膨胀的. 证毕.

3.3.9 系 (Ⅰ) 仿紧空间是可膨胀的；可膨胀空间是可数仿紧的.

(Ⅱ) 空间 X 是有界可膨胀的当且仅当它是离散可膨胀的.

（Ⅲ）　空间 X 是可膨胀的当且仅当它是可数仿紧和离散可膨胀的.

（Ⅳ）　空间 X 是集体正规的当且仅当它是正规离散可膨胀的.

（Ⅴ）　空间 X 是正规可膨胀的当且仅当它是可数仿紧集体正规的.

3.3.10　定义　（Ⅰ）设 $\kappa\geqslant\omega$. 空间 X 是 **κ-θ-可膨胀的**，如果对 X 内每个局部有限闭集族 $\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$，$X$ 内有一列开集族 $\langle\eta_n=\{G(n,\alpha):\alpha<\kappa\}\rangle_{n=0}^{\infty}$，使得

（a）　$\forall n<\omega\forall\alpha<\kappa,F_\alpha\subset G(n,\alpha)$.

（b）　$\forall x\in X\ \exists n(x)<\omega$，使得 $\eta_n(x)$ 在 X 是局部有限的.

ω-θ-可膨胀空间又称为**可数 θ-可膨胀空间**.

（Ⅱ）空间 X 是 **θ-可膨胀的**，如果 $\forall\kappa\geqslant\omega$，$X$ 是 κ-θ-可膨胀的.

3.3.11　引理　空间 X 是可数可膨胀的当且仅当它是可数 θ-可膨胀的.

证　（$\rightarrow$）　显然.

（$\leftarrow$）　设空间 X 是可数 θ-可膨胀的且 $\{F_i:i<\omega\}$ 是 X 内的局部有限闭集族，则 X 内有一列开集族 $\langle\eta_n=\{G(n,i):i<\omega\}\rangle_{n=0}^{\infty}$，使得

（a）　$\forall n,i<\omega,Fi\subset G(n,i)$，

（b）　$\forall x\in X\ \exists n(x)<\omega$，使得 $\eta_n(x)$ 在 x 是局部有限的.

$\forall i<\omega$，令 $G_i=\bigcap\limits_{n=0}^{i}G(n,i)$，则 $F_i\subset G_i$，$\forall x\in X$，$\exists n(x)<\omega$，使得 $\eta_{n(x)}$ 在 x 是局部有限的. 则 $\exists W\in N(x)$，$\exists i_0,\cdots,i_k<\omega$，使得

$$(\eta_{n(x)})_W\subset\{G(n(x),i_0),\cdots,G(n(x),i_k)\}.$$

令 $m=\max\{i_0,\cdots,i_k,n(x)\}$. 则 $\forall i<m$，

$$W\cap Gi\subset W\cap G(n(x),i)=\varnothing.$$

$\{G_i: i<\omega\}$是局部有限开集族，X是可数可膨胀的. 证毕.

3.3.12 定理 (Smith[1976])空间X是κ-可膨胀的当且仅当它是κ-θ-可膨胀的.

证 $(\rightarrow)$ 显然.

$(\leftarrow)$设$\varphi=\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$\kappa$-$\theta$-可膨胀空间$X$内的局部有限闭集族，则$X$内有一列开集族$(\eta_n=\{G(n,\alpha):\alpha<\kappa\})_{n=0}^{\infty}$合定义3.3.10中的$(a)$和$(b)$. 不妨假设$G(n+1,\alpha)\subset G(n,\alpha)$. $\forall n<\omega$，令

$$U_n=\{x\in X:\exists H\in N(x)\text{ 使得 }|(\eta_n)_H|<\omega\}.$$

则$\xi=\{U_n:n<\omega\}$是X的可数上升开复盖. 因X是可数θ-可膨胀的，据3.3.11及3.3.3，X是可数仿紧的. ξ有一个收缩$\xi'=\{W_n:n<\omega\}$，$\overline{W}_n\subset U_n$，$\xi'$又有一个局部有限的精确开加细$\zeta=\{V_n:n<\omega\}$，则$\overline{V}_n\subset\overline{W}_n\subset U_n$. $\forall\alpha<\kappa$，令$G_\alpha=\bigcup_{n=0}^{\infty}(G(n,\alpha)\cap V_n)$，则$G_\alpha$是开集且$F_\alpha\subset G_\alpha$，为证$X$是$\kappa$-可膨胀的，只需再证$\delta=\{G_\alpha:\alpha<\kappa\}$是局部有限的，设$x\in X$，因$\zeta$在$x$局部有限，$\{n<\omega:x\in\overline{V}_n\}=\{n_0,\cdots,n_k\}$有限. 令

$$O=X\setminus\bigcup\{\overline{V}_n:n\in\omega\setminus\{n_0,\cdots,n_k\}\}.$$

则$O\in N(x)$. $\forall i\leqslant k$，$x\in\overline{V}_{n_i}\subset U_{n_i}$. $\exists H_i\in N(x)$，使得$|(\eta_{n_i})_{H_i}|<\omega$. 令$B_i=\{\alpha<\kappa:H_i\cap G(n_i,\alpha)\neq\varnothing\}$，则$B_i$有限. $W=O\cap\bigcap_{i=0}^{k}H_i\in N(x)$. 令$C=\{\alpha<\kappa:W\cap G_\alpha\neq\varnothing\}$. 则$C\subset\bigcup_{i=0}^{k}B_i$. 于是$C$是有限的，从而$\delta$在$x$局部有限. 证毕.

3.3.13 系 空间X是可膨胀的当且仅当它是θ-可膨胀的.

3.3.14 定义 空间X的子集族ζ是**内部保持的**，，如果$\forall\zeta'\subset\zeta$，$(\bigcap\zeta')^\circ=\bigcap\{A^\circ:A\in\zeta'\}$.

显然，点有限的或良序子集族都是内部保持的. 集族ζ是内部保持的当且仅当族$\{X\setminus A:A\in\zeta\}$是闭包保持的.

3.3.15　引理　设 η 是空间 X 的开集族，则下列各条等价：

（Ⅰ）　η 是内部保持的；

（Ⅱ）　$\forall x\in \bigcup\eta$，$\bigcap(\eta)_x$ 是开集；

（Ⅲ）　若 $\varnothing\neq\eta'\subset\eta$，则 $\bigcap\eta'$ 是开集.

3.3.16　引理　（Ⅰ）　设 η 是空间 X 内的内部保持开集族. $\forall s\in S$，$\eta_s\subset\eta$. 令

$$\varphi=\{\bigcap\eta_s: s\in S\},\psi=\{\bigcup\eta_s: s\in S\}.$$

则 φ,ψ 皆是 X 内的内部保持开集族.

（Ⅱ）　若 ζ,η 是空间 X 内的内部保持开集族，则 $\zeta\wedge\eta=\{U\cap V: U\in\zeta, V\in\eta\}$ 是 X 内的内部保持开集族.

3.3.17　定义　设 ξ,η 是空间 X 的覆盖.

（Ⅰ）　η 是 ξ 在点 $x\in X$ 的**点式（局部）W-加细**，如果 ξ 有有限子族 ξ'，使得 $(\eta)_x$ 部分加细 ξ'（$\exists G\in N(x)$，使得 $(\eta)_G$ 部分加细 ξ'）.

（Ⅱ）　η 是 ξ 的**点式（局部）W-加细**，如果 η 是 ξ 在每一点 $x\in X$ 的点式（局部）W-加细.

Worrell[1966a]为了刻画亚紧空间而引入了点式 W-加细的概念. 它是点有限加细与点星形加细的公共推广. 其后，在 Worrell[1968]中引入了局部 W-加细的概念，用以刻画仿紧性. 局部 W-加细显然是局部有限加细与局部星形加细的公共推广.

3.3.18　引理　设空间 X 的开覆盖 ξ 有内部保持开的点星形加细 η，则 ξ 有闭包保持闭加细 φ. 如果 η 还是 ξ 的局部星形加细，则 $\{F^\circ: F\in\varphi\}$ 覆盖 X.

证　令

$$F(U)=\{x\in X: \mathrm{St}(x,\eta)\subset U\},U\in\xi.$$

则 $F(U)\subset U$. 若 $\exists y\in F(U)\cap\bigcap(\eta)_x$. 则 $(\eta)_x\subset(\eta)_y$ 从而 $\mathrm{St}(x,\eta)\subset\mathrm{St}(y,\eta)\subset U$. $x\in F(U)$. 于是有

$$\text{若}\quad F(U)\cap\bigcap(\eta)_x\neq\varnothing,\text{则 } x\in F(U). \tag{1}$$

因 η 是内部保持开覆盖，由(1)知，$F(U)$是闭集. 现证

$$\varphi=\{F(U):U\in\xi\}\text{ 是 }\xi\text{ 的闭包保持闭加细}. \tag{2}$$

事实上，设 $x\in X$，则$\exists U\in\xi$，$\mathrm{St}(x,\eta)\subset U$. 故 $x\in F(U)$. φ 是 ξ 的加细. $\forall\xi'\subset\xi$，$\forall x\in\overline{\bigcup\{F(U):U\in\xi'\}}$，因$\bigcap(\eta)_x\in N(x)$，$\exists U_0\in\xi'$，$\bigcap(\eta)_x\cap F(U_0)\neq\varnothing$. 由(1)知，$x\in F(U_0)$. φ 是闭包保持的，(2)真.

若 η 还是 ξ 的局部星形加细. $\forall x\in X$ $\exists G\in N(x)\exists U\in\xi$，$\mathrm{St}(G,\eta)\subset U$，则 $G\subset F(U)$. $x\in F(U)^\circ$，$\{F^\circ:F\in\varphi\}$覆盖 X. 证毕.

3.3.19　引理　设 ξ 是空间 X 的内部保持开覆盖. φ 是 X 的闭包保持闭覆盖. 令

$$W(x)=(X\setminus\bigcup\{F\in\varphi:x\notin F\})\cap\bigcap(\xi)_x,\quad x\in X.$$

则 $\eta=\{W(x):x\in X\}$是 X 的内部保持开覆盖，使得

(Ⅰ)　若 φ 是 ξ 的加细，则 η 是 ξ 的点星形加细. 若$\{F^\circ:F\in\varphi\}$还是 X 的覆盖，则 η 是 ξ 的局部星形加细.

(Ⅱ)　若 φ 是 ξ^F 的加细，则 η 是 ξ 的点式 W-加细. 若$\{F^\circ:F\in\varphi\}$还覆盖 X，则 η 是 ξ 的局部 W-加细.

证　因 ξ 是 X 的内部保持开覆盖，$W(x)$是含 x 的开集. η 是 X 的内部保持开覆盖.

(Ⅰ)　若 φ 是 ξ 的加细. $\forall F\in\varphi$ $\exists U(F)\in\xi$，$F\subset U(F)$. 则有

$$\forall F\in\varphi,\mathrm{St}(F,\eta)\subset U(F). \tag{1}$$

事实上，设 $F\in\varphi$ 且 $W(y)\in\eta$，使得 $F\cap W(y)\neq\varphi$. 则 $y\in F\subset U(F)$，$U(F)\in(\xi)_y$. $W(y)\subset\bigcap(\xi)_y\subset U(F)$，(1)真.

$\forall x\in X$，$\exists F\in\varphi$，使得 $x\in F$. 由(1)知，$\mathrm{St}(x,\eta)\subset U(F)$. η 是 ξ 的点星形加细. 若$\{F^\circ:F\in\varphi\}$还覆盖 X. $\forall x\in X$ $\exists F\in\varphi$，使得 $x\in F^\circ$，由(1)知，$\mathrm{St}(F^\circ,\eta)\subset U(F)$. η 是 ξ 的局部星形加细.

(Ⅱ)　若 φ 是 ξ^F 的加细. $\forall F\in\varphi$ 存在有限子族 $\xi(F)\subset\xi$，使得

$F\subset\bigcup\xi(F)$，则有

$$(\eta)_F\text{ 部分加细 }\xi(F). \tag{2}$$

因设 $W(y)\in\eta$ 且 $F\cap W(y)\neq\varnothing$，则 $y\in F\subset\bigcup\xi(F)$. 存在 $U\in\xi(F)$，$y\in U$，$U\in(\xi)_y$. 则

$$W(y)\subset\bigcap(\xi)_y\subset U\in\xi(F),\text{(2) 真}.$$

$\forall x\in X\ \exists F\in\varphi$，$x\in F$. 由(2)知，$(\eta)_x$ 部分加细 $\xi(F)$，η 是 ξ 的点式 W-加细. 若 $\{F^\circ:F\in\varphi\}$ 覆盖 X，$\forall x\in X\ \exists F\in\varphi$，$x\in F^\circ$. 由(2)知，$(\eta)_F$ 部分加细 $\xi(F)$. η 是 ξ 的局部 W-加细. 证毕.

3.3.20　引理　设 ξ 是空间 X 的内部保持开覆盖. 则

（Ⅰ）　ξ 有内部保持开的点星形加细当且仅当 ξ 有闭包保持闭加细.

（Ⅱ）　ξ 有内部保持开的局部星形加细当且仅当 ξ 有闭包保持闭加细 φ，使得 $\{F^\circ:F\in\varphi\}$ 覆盖 X.

证　由3.3.18和3.3.19引理，不难证明.

3.3.21　引理　设 ξ 是空间 X 的内部保持开覆盖. 则 ξ 有内部保持开的点式(局部)W-加细当且仅当 ξ^F 有内部保持开的点(局部)星形加细.

证(→)设 ξ 有内部保持开的点式(局部)W-加细 η，则 η 是 ξ^F 的点(局部)星形加细.

(←)设 ξ^F 有内部保持开的点(局部)星形加细. 据3.3.20，ξ^F 有闭包保持闭加细 φ(且 $\{F^\circ:F\in\varphi\}$ 覆盖 X)，据3.3.19，ξ 有内部保持开的点式(局部)W-加细. 证毕.

据 Smith[1980]说，J. Chaber 在一篇未发表的论文中曾引入性质 b_1 的概念. 它在形式上较狭义拟仿紧性弱些. 二者是否等价尚不知道. 下面介绍这一概念.

3.3.22　定义　（Ⅰ）　设 $\forall n<\omega$，φ_n 是空间 X 的子集族. 称

$\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$ 是 σ-相对局部有限相对闭的，如果 $\forall n<\omega$，φ_n 是子空间 $X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i)$ 内的局部有限闭集族.

（Ⅱ）　设基数 $\kappa\geqslant\omega$，称空间 X **具有性质** κ-b_1，如果 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖有一个 σ-相对局部有限相对闭加细. 称 X **具有性质** b_1，如果对每个 $\kappa\geqslant\omega$，X 具有性质 κ-b_1.

3.3.23　定义　（Ⅰ）　(Katuta[1969])空间 X 的开覆盖是 **A-覆盖**，如果它有一个局部有限加细.

（Ⅱ）　空间 X 的开覆盖 ξ 称为 **l-覆盖**，如果它有一个加细 $\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，使得 $\forall n<\omega$，φ_n 是 $X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i)$ 内的局部有限子集族.

3.3.24　定理　对任意空间 X，下列各条等价：

（Ⅰ）　X 是 κ-可膨胀的；

（Ⅱ）　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的 l-覆盖有局部有限开加细；

（Ⅲ）　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的定向 l-覆盖有局部有限开加细；

（Ⅳ）　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的定向 l-覆盖有闭包保持闭加细 φ，使得 $\{F^\circ:F\in\varphi\}$ 覆盖 X；

（Ⅴ）　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的定向 l-覆盖有垫状开加细；

（Ⅵ）　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持定向 A-覆盖有垫状开加细.

证　（Ⅰ）→（Ⅱ）设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 κ-可膨胀空间 X 的 l-覆盖. 则 ξ 有一个加细 $\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，使得 $\forall n<\omega$，φ_n 是 $X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i)$ 内的局部有限子集族. 不妨设 $\varphi_n=\{F_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}$ 且 $F_{n\alpha}\subset U_\alpha$，$\alpha<\kappa$. 先证

论断1　$\forall n<\omega$，X 有子集族 η_n 满足：

(a)　$\eta_n=\{V_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}$ 是 X 内的局部有限开集族，使得 $\forall\alpha<\kappa$，$V_{n\alpha}\subset U_\alpha$.

(b)　$\bigcup_{i\leqslant n}(\bigcup\varphi_i)\subset\bigcup_{i\leqslant n}(\bigcup\eta_i)$.

证　$\{\overline{F}_{0\alpha}:\alpha<\kappa\}$是 X 内的局部有限闭集族，存在局部有限开集

族 $\eta_0=\{V_{0\alpha}:\alpha<\kappa\}$，使得 $\overline{F}_{0\alpha}\subset V_{0\alpha}$. 不妨设 $V_{0\alpha}\subset U_\alpha$. 则 $\bigcup\varphi_0\subset\bigcup\eta_0$. 现设 $n<\omega$ 且设 $\forall i<n$，已构成 η_i. 由(b)知，$\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i)\subset\bigcup_{i<n}(\bigcup\eta_i)$. 于是 $\varphi_n|(X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\eta_i))$ 是 X 内的局部有限子集族. X 内有局部有限开集族 $\eta_n=\{V_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}$ 使得

$$F_{n\alpha}\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\eta_i)\subset V_{n\alpha}\subset U_\alpha,\alpha<\kappa.$$

于是有 $\bigcup\varphi_n\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\eta_i)\subset\bigcup\eta_n$，从而

$$\bigcup_{i\leq n}(\bigcup\varphi_i)\subset\bigcup_{i<n}(\bigcup\eta_i)\cup\bigcup\eta_n\subset\bigcup_{i\leq n}(\bigcup\eta_i).$$

η_i 满足(a)，(b). 由归纳法知，论断1真.

因 κ-可膨胀空间是可数仿紧的，X 的可数开覆盖 $\{\bigcup\eta_n:n<\omega\}$ 有局部有限的精确开加细 $\{W_n:n<\omega\}$，则 $W_n\subset\bigcup\eta_n$. 易知，族

$$\{W_n\cap V_{n\alpha}:n<\omega,\alpha<\kappa\}$$

是 ξ 的局部有限开加细.

(Ⅱ)→(Ⅲ)　显然.

(Ⅲ)→(Ⅳ)　设 ξ 是 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的定向 l-覆盖. 由假设(Ⅲ)，ξ 有局部有限开加细 η. 则 η 是 X 的内部保持开覆盖且 η 是自己的内部保持开的局部 W-加细. 据3.3.21，η^F 有一个内部保持开的局部星形加细. 据3.3.20，η^F 有一个闭包保持闭加细 φ，使得 $\{F^\circ:F\in\varphi\}$ 覆盖 X. 因 ξ 是定向的，φ 也是 ξ 的加细.

(Ⅳ)→(Ⅴ)　设 ξ 是 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的定向 l-覆盖. 由假设(Ⅳ)，ξ 有闭包保持闭加细 φ，使得 $\eta=\{F^\circ:F\in\varphi\}$ 覆盖 X. 则 η 是 ξ 的垫状开加细.

(Ⅴ)→(Ⅵ)　显然.

(Ⅵ)→(Ⅰ)　设 $\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 内局部有限闭集族. 令 $S=\{s\subset\kappa:|s|<\omega\}$，

$$U(s)=X\setminus\bigcup\{F_\alpha:\alpha\in\kappa\setminus s\},s\in S.$$

则 $\xi=\{U(s):s\in S\}$ 是 X 的内部保持的定向开覆盖且 $|\xi|\leqslant|S|=\kappa$. 族

$$\{U(\varnothing)\}\cup\{U(s)\cap\bigcap_{\alpha\in s}F_\alpha:s\in S\setminus\{\varnothing\}\}$$

是 ξ 的局部有限加细，从而 ξ 是 A-覆盖. 由假设(Ⅵ)，ξ 有精确垫状开加细 $\{V(s):s\in S\}$，令

$$G_\alpha=X\setminus\overline{\bigcup\{V(s):s\in S,\alpha\notin s\}},\alpha<\kappa.$$

则 $\{G_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 内的局部有限开集族，使得 $F_\alpha\subset G_\alpha,\alpha<\kappa$. X 是 κ-可膨胀的. 证毕.

3.3.25　定理　对任意空间 X，下列各条等价：

(Ⅰ)　X 是 κ-可膨胀的；

(Ⅱ)　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的定向 l-覆盖有局部有限开的强加细；

(Ⅲ)　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的定向 l-覆盖有局部有限闭加细.

证　(Ⅰ)→(Ⅱ)　设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 κ-可膨胀空间 X 的定向 l-覆盖. 据3.3.24，ξ 有局部有限开的精确加细 $\{G_\alpha:\alpha<\kappa\}$，则 $G_\alpha\subset U_\alpha$. 令 $S=\{s\subset\kappa:|s|<\omega\}$，$H(s)=X\setminus\bigcup\{\overline{G}_\alpha:\alpha\in\kappa\setminus s\}$，$s\in S$. 则 $\zeta=\{H(s):s\in S\}$ 是 X 的定向开覆盖且 $|\zeta|\leqslant\kappa$. 族

$$\{H(\varnothing)\}\cup\{H(s)\cap\bigcap_{\alpha\in S}\overline{G}_\alpha:S\in S\setminus\{\varnothing\}\}$$

是 ζ 的局部有限加细，ζ 是 l-覆盖. 据3.3.24，ζ 有局部有限开的精确加细 $\eta=\{V(s):s\in S\}$，则

$$\overline{V(s)}\subset\overline{H(s)}\subset X\setminus\bigcup\{G_\alpha:\alpha\in\kappa\setminus s\}\subset\bigcup_{\alpha\in S}G_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in S}U_\alpha.$$

因 ξ 是定向的，$\exists\beta<\kappa$，$\bigcup_{\alpha\in X}U_\alpha\subset U_\beta$，则 $\overline{V(s)}\subset U_\beta$. η 是 ξ 的强加细.

(Ⅱ)→(Ⅲ)　显然.

(Ⅲ)→(Ⅰ)　设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 的定向 l-覆盖. 据3.3.24，只需证 ξ 有局部有限开加细. 由假设(Ⅲ)，ξ 有局部有限闭的精确加细 $\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$，则 $F_\alpha\subset U_\alpha,\alpha<\kappa$. 令 $S=\{s\subset\kappa:|s|<\omega\}$，$V_s=X\setminus\bigcup$

$\{F_\alpha:\alpha\in\kappa\setminus s\}$，则$\{V_s:s\in S\}$是$X$的势$\leqslant\kappa$的定向$l$-覆盖．由假设(Ⅱ)，它有局部有限闭的精确加细$\{C_s:s\in S\}$，则$C_s\subset V_s$．令

$$G_\alpha=X\setminus\bigcup\{C_s:s\in S,C_s\cap F_\alpha=\varnothing\},\quad \alpha<\kappa.$$

则G_α是包含F_α的开集且$\forall s\in S,\alpha<\kappa$，有

$$G_\alpha\cap C_s\neq\varnothing\leftrightarrow F_\alpha\cap C_s\neq\varnothing.\tag{1}$$

因$F_\alpha\subset U_\alpha\cap G_\alpha$，$\varphi=\{U_\alpha\cap G_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$\xi$的开加细．由(1)易知，$\varphi$是局部有限的，证毕．

3.3.26　系　具有性质κ-b_1的κ-可膨胀空间是κ-仿紧的．

证　设X是具有性质κ-b_1的κ-可膨胀空间．ξ是X的势$\leqslant\kappa$的定向开覆盖．则ξ有一个加细$\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，使得$\forall n<\omega$，$\varphi_n$是$X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i)$内的局部有限闭集族．$\xi$是$l$-覆盖，据3.3.25，$\xi$有局部有限闭加细．据2.3.11，$X$是$\kappa$-仿紧的．证毕．

3.3.27　引理　设空间X的覆盖$\xi=\{U(s):s\in S\}$有开的局部θ-加细序列$\langle\zeta_n\rangle$，则ξ有开的局部θ-加细序列$\langle\eta_n\rangle$，使得$\forall n<\omega$，$\eta_n=\{V_{ns}:s\in S\}$且$\forall s\in S$，$V_{ns}\subset U(s)$．

证　$\forall n<\omega\ \forall W\in\zeta_n\exists h(n,W)\in S$，使得$W\subset U(h(n,W))$．令

$$V_{ns}=\bigcup\{W\in\zeta_n:h(n,W)=s\},s\in S.$$

则$V_{ns}\subset U(s)$，令$\eta_n=\{V_{ns}:s\in S\}$，则$\langle\eta_n\rangle$是ξ的局部θ-加细序列．证毕．

3.3.28　定理　对任意空间X，下列各条等价：

(Ⅰ)　X是κ-可膨胀的；

(Ⅱ)　X的每个势$\leqslant\kappa$的l-覆盖有开的局部θ-加细序列；

(Ⅲ)　X的每个势$\leqslant\kappa$的定向l-覆盖有σ-闭包保持闭加细φ，使得$\{F^\circ:F\in\varphi\}$覆盖X；

(Ⅳ)　X的每个势$\leqslant\kappa$的定向l-覆盖有σ-垫状开加细；

(Ⅴ)　X的每个势$\leqslant\kappa$的定向的内部保持A-覆盖有σ-垫状开

加细.

证　(Ⅰ)→(Ⅱ)　由3.3.24知.

(Ⅱ)→(Ⅲ)　设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 的定向 l-覆盖. 由假设(Ⅱ), ξ 有开的局部 θ-加细序列 $\langle\eta_n\rangle$, 使得每个 $\eta_n=\{V(n,\alpha):\alpha<\kappa\}$ 且 $V(n,\alpha)\subset U_\alpha$, $\alpha<\kappa$. 令 $S=\{s\subset\kappa:|s|<\omega\}$. $\forall m,n<\omega$, $s\in S$, 令

$$H_{nm}=\{x\in X:|(\eta_n)_x|\leqslant m+1\},$$

$$F(n,m,s)=H_{nm}\setminus\bigcup\{V(n,\alpha):\alpha\in\kappa\setminus s\}.$$

则 $\varphi_{nm}=\{F(n,m,s):s\in S\}$ 是闭包保持闭集族. 事实上, 易知 H_{nm} 是闭集. $\{H_{nm}\cap V(n,\alpha):\alpha<\kappa\}$ 是子空间 H_{nm} 内的点有限开集族. 于是, 族

$$\{H_{nm}\cap\bigcup\{V(n,\alpha):\alpha\in\kappa\setminus s\}:s\in S\}$$

是 H_{nm} 内的内部保持开集族. 则

$$\varphi_{nm}=\{H_{nm}\setminus(H_{nm}\cap\bigcup\{V(n,\alpha):\alpha\in\kappa\setminus s\}):s\in S\}$$

是闭集 H_{nm} 内的, 从而是 X 内的闭包保持闭集族. 令 $\varphi=\bigcup_{n,m=0}^{\infty}\varphi_{nm}$. 下证

论断1　$\forall x\in X\ \exists F_x\in\varphi\ \exists\alpha<\kappa$, 使得

$$x\in F_x^\circ\subset F_x\subset U_\alpha.$$

于是 $\varphi'=\{F_x:x\in X\}$, 即为满足条件(Ⅲ)的闭集族.

证　设 $x\in X$, 则 $\exists n<\omega\ \exists G\in N(x)$, 使得

$$(\eta_n)_G=\{V(n,\alpha_0),\cdots,V(n,\alpha_m)\}$$

且 $i\neq j$ 时, $V(n,\alpha_i)\neq V(n,\alpha_j)$. 令 $s=\{\alpha_0,\cdots,\alpha_m\}$. 因 ξ 是定向的, $\exists\alpha<\kappa$, $U_{\alpha_0}\cup\cdots\cup U_{\alpha_m}\subset U_\alpha$. 令 $F_x=F(n,m,s)$, 则 $x\in F_x^\circ\subset F_x\subset U_\alpha$. 论断1真.

(Ⅲ)→(Ⅳ)　设 ξ 是 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的定向 l-覆盖. 由假设(Ⅲ), ξ 有 σ-闭包保持闭加细 φ, 使得 $\eta=\{F^\circ:F\in\varphi\}$ 覆盖 X. 则 η 是 ξ 的 σ-垫状开加细.

(Ⅳ)→(Ⅴ)　显然.

(Ⅴ)→(Ⅰ)　据3.3.12,只需证 X 是 κ-θ-可膨胀的. 设$\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是 X 内的局部有限闭集族. 令 $S=\{s\subset\kappa:|s|<\omega\}$. $U_s=X\setminus\bigcup\{F_\alpha:\alpha\in\kappa\setminus s\}$. 由3.3.24的证明知,$\xi=\{U_s:s\in S\}$是 X 的势$\leqslant\kappa$的内部保持定向 A-覆盖. 由假设(Ⅴ),ξ 有 σ-垫状开加细 $\eta=\bigcup_{n=0}^{\infty}\eta_n$,其中每个 $\eta_n=\{V_{ns}:s\in S\}$,使得$\forall T\subset S$,

$$\overline{\bigcup_{s\in T}V_{ns}}\subset\bigcup_{s\in T}U_s.$$

令 $G_{n\alpha}=X\setminus\overline{\bigcup\{V_{ns}:s\in S,\alpha\notin s\}}$,$n<\omega,\alpha<\kappa$. 则 $F_\alpha\subset G_{n\alpha}$. 令 $\varphi_n=\{G_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}$. $\forall x\in X$ $\exists n<\omega$ $\exists s\in S$,使得 $x\in V_{ns}$. 则$\forall\alpha\in\kappa\setminus s$,

$$V_{ns}\cap G_{n\alpha}\subset V_{ns}\cap(X\setminus V_{ns})=\varnothing.$$

φ_n 在 x 局部有限. X 是 κ-θ-可膨胀的. 证毕.

3.3.29　定理　对任意空间 X,下列各条等价:

(Ⅰ)　X 是 κ-可膨胀的.

(Ⅱ)　X 的每个势$\leqslant\kappa$的定向 l-覆盖有开的局部星形加细.

(Ⅲ)　X 的每个势$\leqslant\kappa$的定向 l-覆盖有半开的局部星形加细序列.

证　(Ⅰ)→(Ⅱ)　设 ξ 是 κ-可膨胀空间 X 的势$\leqslant\kappa$的定向 l-覆盖. 据3.3.24,ξ 有局部有限开加细 η. 因 ξ 是定向的,η 是 ξ 的局部星形加细.

(Ⅱ)→(Ⅲ)　显然.

(Ⅲ)→(Ⅰ)　设 $\xi=\{G_\alpha:\alpha<\kappa\}$是 X 的定向 l-覆盖. 据3.3.28,只需证 ξ 有 σ-垫状开加细. 由假设(Ⅲ),ξ 有半开的局部星形加细序列$\langle\eta_n\rangle$. $\forall A\subset X,n<\omega$,令

$$W(n,A)=\{x\in X:\exists G\in N(x),\mathrm{St}(G,\eta_n)\subset A\}.$$

则 $W(n,A)$是开集且若 $A\subset B$,则 $W(n,A)\subset W(n,B)$. $\forall x\in\overline{W(n,A)}$,

因 η_n 是半开的，$\exists y\in W(n,A)\cap \mathrm{St}(x,\eta_n)$. 则$\exists G\in N(y)$，$\mathrm{St}(G,\eta_n)\subset A$. 于是 $x\in \mathrm{St}(y,\eta_n)\subset A$. 这就证明了

$$\forall n<\omega\ \forall A\subset X\ (\overline{W(n,A)}\subset A). \tag{1}$$

令 $\zeta_n=\{W(n,U_\alpha):\alpha<\kappa\}$. 则由(1)式知，$\zeta=\bigcup\limits_{n<\omega}\zeta_n$ 是 ξ 的 σ-垫状开加细. 证毕.

连续函数 $f:X\to Y$ 称为**商映射**，如果$\forall U\subset Y$，若 $f^{-1}[U]$开于 X，则 U 开于 Y.

3.3.30　定义　设 $f:X\to Y$ 是满映射，我们称 f 是**双商的**(Michael[1968])，如果$\forall y\in Y$，若 X 的开集族 ξ，使得 $f^{-1}[y]\subset\bigcup\xi$，则存在 $U_0,\cdots,U_n\in\xi$，使得 $y\in(f[U_0]\cup\cdots\cup f[U_n])^\circ$.

让我们用记号"伪开→商"表示每个伪开映射是商映射. 余类推.

3.3.31　引理　对任意的满映射 $f:X\to Y$，下列关系成立：

```
               完备     闭
                 ↓       ↓
开→几乎开→双商→伪开→商
```

证　由有关的定义直接可证.

上面的各个箭头皆不可逆. 欲知相应的反例，读者可参见 Siwiec，F. and Mancuso，V. J. [1971].

3.3.32　引理　设 X 是 κ-可膨胀空间且 $f:X\to Y$ 是闭的双商映射，则 Y 是 κ-可膨胀空间.

证　设 $\eta=\{V_\alpha:\alpha<\kappa\}$是 Y 的定向 l-覆盖. 则 $\eta'=\{f^{-1}[V_\alpha]:\alpha<\kappa\}$是 X 的定向 l-覆盖，从而它有一个闭包保持闭加细 φ，使得$\{F^\circ:F\in\varphi\}$覆盖 X. 不妨设 $\varphi=\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$，使得 $F_\alpha\subset f^{-1}[V_\alpha]$，$\alpha<\kappa$. 令 $\zeta=\varphi''$，则 ζ 是 X 的闭包保持闭覆盖. $\{f[C]:C\in\zeta\}$是 Y 的闭包保持闭覆盖. 因 η 是定向的，它是 η 的加细. 易知$\{f[C]^\circ:C\in\zeta\}$覆盖 Y. 于是 Y 是 κ-可膨胀的. 证毕.

§3.4　Σ-积的正规性

可数多个度量空间的积空间是可度量的，从而是正规的．但不可数多个度量空间的积不必正规．本节将介绍后一结论的反例，即例3.4.11．从这个例子还可以推出：若 T_1 空间的任何积空间是正规的，那么除可数多个因子空间外，其余因子必须是可数紧的．于是，人们对任意积空间的正规性的研究兴趣转向寻求积空间的适当子空间的正规性．Σ-积就是这样的一类重要而有用的子空间．Corson[1959]引入 Σ-积的概念并证明了完备度量空间的 Σ-积是正规的．他同时提问：度量空间的 Σ-积是正规的吗？在一段时期里它成为一个著名的公开问题．大约20年后，Gul'ko[1977]与 Rudin[1977]独立地正面解答了这个问题．

本节的目的在于介绍 Yajima[1984]对上述结果的进一步推广．作为必要的准备，本节首先介绍 Σ-空间的概念．这是一类重要的广义度量空间，是为了研究 T_2 仿紧空间的可数乘性而引入的．我们将介绍 T_2 仿紧 Σ-空间具有可数乘性这一重要结果．本节的主要结果将在最后给出．

3.4.1　定义　设 $\langle x_n\rangle$ 是空间 X 内的序列．称 $x\in X$ 是 $\langle x_n\rangle$ 的一个聚点，如果 $\forall U\in N(x)\forall n<\omega\exists k<\omega(k\geqslant n$ 且 $x_k\in U)$．

adh$\langle x_n\rangle$ 表 $\langle x_n\rangle$ 的一切聚点之集．

由蒲保明等[1985]4.1.D 知，

$$\mathrm{adh}\langle x_n\rangle=\bigcap_{n<\omega}\overline{\{x_k:k\geqslant n\}}.$$

3.4.2　定义　设 $A,B_n(n<\omega)$ 是空间 X 的子集，集列 $\langle B_n\rangle$ 是 A 的外网络，如果 $A\subset\bigcap_{n<\omega}B_n$ 且 $\forall U\in N(A)\exists n<\omega,B_n\subset U$．

集 X 的子集列 $\langle A_n\rangle$ 称为下降的，如果 $\forall n<\omega, A_{n+1}\subset A_n$.

3.4.3　引理　设 $\langle A_n\rangle$ 是空间 X 内的不空闭集组成的下降序列. 记 $A^\infty=\bigcap_{n<\omega}A_n$，则下列各条等价：

(Ⅰ)　$A^\infty\neq\varnothing$ 且若 $x_n\in A_n, n<\omega$. 则 $\mathrm{adh}\langle x_n\rangle\neq\varnothing$；

(Ⅱ)　A^∞ 是不空的可数紧子集且 $\langle A_n\rangle$ 是 A^∞ 的外网络；

(Ⅲ)　若 $x_n\in A_n, n<\omega$. 则 $A^\infty\cap\mathrm{adh}\langle x_n\rangle\neq\varnothing$；

(Ⅳ)　若 $\langle K_n\rangle$ 是 X 内不空闭集的下降序列，使得 $K_n\subset A_n, n<\omega$. 则 $\bigcap_{n<\omega}K_n$ 是不空可数紧子集；

(Ⅴ)　若 $\langle K_n\rangle$ 是 X 内不空闭集的下降序列，使得 $K_n\subset A_n, n<\omega$. 则 $\bigcap_{n<\omega}K_n\neq\varnothing$.

证　(Ⅰ)→(Ⅱ)　设 $\langle x_n\rangle$ 是 A^∞ 内的序列. $\forall n<\omega, x_n\in A_n$. 由假设(Ⅰ)，$\exists x\in\mathrm{adh}\langle x_n\rangle$. 因 A^∞ 是闭集，$x\in A^\infty$. A^∞ 是可数紧的. 其次，设 $U\in N(A^\infty)$. 若 $\forall n<\omega, A_n\not\subset U$，取 $x_n\in A_n\setminus U$. 设 $p\in\mathrm{adh}\langle x_n\rangle$，则 $p\in U$. $\exists k\geqslant 1$，使 $x_k\in U$，矛盾. 故 $\exists n<\omega, A_n\subset U$.

(Ⅱ)→(Ⅲ)　设 $x_n\in A_n, n<\omega$. 令 $F_n=\overline{\{x_k: k\geqslant n\}}$，则 $\langle F_n\rangle$ 是下降的不空闭集列且 $\mathrm{adh}\langle x_n\rangle=\bigcap_{n<\omega}F_n$. 若 $A^\infty\cap\bigcap_{n<\omega}F_n=\varnothing$，$A^\infty\subset\bigcup_{n<\omega}(X\setminus F_n)$，因 A^∞ 是可数紧的，$\exists n_0<n_1<\cdots<n_k$，使得 $A^\infty\subset\bigcup_{i=0}^{k}(X\setminus F_{n_i})=X\setminus F_{n_k}$. 由假设(Ⅱ)，$\exists j<\omega, A_j\subset X\setminus F_{n_k}$，令 $m=\max\{j,n_k\}$，则 $x_m\in F_{n_k}$ 且 $x_m\in A_m\subset A_j\subset X\setminus F_{n_k}$，矛盾. 故 $A^\infty\cap\mathrm{adh}\langle x_n\rangle\neq\varnothing$.

(Ⅲ)→(Ⅳ)　设 $\langle K_n\rangle$ 是不空闭集的下降序列，使得 $K_n\subset A_n, n<\omega$. 任取 $x_n\in K_n\subset A_n$，由假设(Ⅲ)，$\exists x\in A^\infty\cap\mathrm{adh}\langle x_n\rangle$，则 $x\in\bigcap_{n<\omega}K_n$. 其次，对 $\bigcap_{n<\omega}K_n$ 内任一序列 $\langle t_n\rangle$，与前同理知，$\exists t\in(\bigcap_{n<\omega}K_n)\cap\mathrm{adh}\langle t_n\rangle$. 故 $\bigcap_{n<\omega}K_n$ 是可数紧的.

(Ⅳ)→(Ⅴ)　显然.

（V）→（I）　$\forall n<\omega$，令 $K_n=A_n$，则 $\langle K_n\rangle$ 是不空闭集的下降序列. 由假设（V），$A^\infty=\bigcap\limits_{n<\omega}K_n\neq\varnothing$. 其次，设 $x_n\in A_n$，$n<\omega$. $\forall n<\omega$，令 $K_n=\overline{\{x_k:k\geqslant n\}}$，则 $\langle K_n\rangle$ 是不空闭集的下降序列，使得 $K_n\subset A_n$，由假设（V），$\exists x\in\bigcap\limits_{n<\omega}K_n=\mathrm{adh}\langle x_n\rangle$，证毕.

3.4.4　引理　在3.4.3的假设下，下列各条等价：

（I）　A^∞ 是不空紧子集且若 $x_n\in A_n$，$n<\omega$. 则 $\mathrm{adh}\langle x_n\rangle\neq\varnothing$；

（II）　A^∞ 是不空紧子集且 $\langle A_n\rangle$ 是 A^∞ 的外网络；

（III）　若 $\langle K_n\rangle$ 是 X 内的不空闭集的下降序列，使得 $K_n\subset A_n$，$n<\omega$. 则 $\bigcap\limits_{n<\omega}K_n$ 是不空紧子集.

证　证法与3.4.3相同.

3.4.5　定义　（Nagami[1969]）　空间 X 是 Σ-空间（**强 Σ-空间**），如果 X 有一列局部有限闭覆盖 $\langle\varphi_n\rangle_{n<\omega}$ 合下列条件：

（Σ）　$\forall x\in X$，若 $\langle K_n\rangle$ 是 X 内不空闭集的下降序列，使得 $K_n\subset\bigcap(\varphi_n)_x$，$n<\omega$. 则 $\bigcap\limits_{n<\omega}K_n$ 是不空可数紧（紧）子集.

这时，覆盖列 $\langle\varphi_n\rangle_{n<\omega}$ 称为 X 的**强 Σ-网络**.

由下面的注易见，伪度量空间和紧空间是强 Σ-空间. 可数紧空间是 Σ-空间.

注　设 $\langle\varphi_n\rangle$ 是空间 X 的任意一列局部有限闭覆盖. 必要时以 $\varphi'_n=\varphi_0\cup\varphi_1\cup\cdots\cup\varphi_n$ 代替 φ_n，不妨设 $\forall n<\omega$，$\varphi_n\subset\varphi_{n+1}$. 于是 $\forall x\in X$，$\langle\bigcap(\varphi_n)_x\rangle_{n<\omega}$ 是不空闭集的下降序列. 由引理3.4.3及3.4.4知，（强）Σ-空间的定义又有几种不同的等价形式，例如：

（I）　空间 X 是 Σ-空间当且仅当它有一列局部有限闭覆盖 $\langle\varphi_n\rangle$，使得

$$\forall x\in X\ \forall n<\omega\ \forall x_n\in\bigcap(\varphi_n)_x,\ \mathrm{adh}\langle x_n\rangle\neq\varnothing.$$

（II）　空间 X 是（强）Σ-空间当且仅当它有一列局部有限闭

覆盖$\langle\varphi_n\rangle$，使得$\forall x\in X, C(x)=\bigcap_{n<\omega}(\bigcap(\varphi_n)_x)$是可数紧(紧)子集，并且$\langle\bigcap(\varphi_n)_x\rangle_{n<\omega}$是$C(x)$的外网络.

(Ⅱ)　空间X是(强)Σ-空间当且仅当它有一列局部有限闭覆盖$\langle\varphi_n\rangle$，使得$\forall x\in X$，如果$\{H_n:n<\omega\}$是X内具有有限交性质的闭集族，使得$\forall n<\omega, H_n\subset\bigcap(\varphi_n)_x$，则$\bigcap_{n<\omega}H_n$是不空的可数紧(紧)子集.

3.4.6　引理　设X是(强)Σ-空间，则X有一个(强)Σ-网络$\langle\varphi_n=\{F(s):s\in{}^{\bar{n}}\Omega\}\rangle_{n\in N}$(其中$\bar{n}=\{1,2,\cdots,n\}$)满足下列条件：$\forall n\in N$，

(a)　φ_n是X的局部有限闭覆盖，它对有限交封闭，且$\varphi_n\subset\varphi_{n+1}$；

(b)　$\forall s\in{}^{\bar{n}}\Omega, F(s)=\bigcup\{F(s+a):a\in\Omega\}$；

(c)　$\forall x\in X\exists s(x)\in{}^N\Omega$，使得

(c.1)　$C(x)=\bigcap_{n\in N}F(s(x)|\bar{n})$是含$x$的可数紧(紧)子集，

(c.2)　$\langle F(s(x)|\bar{n})\rangle_{n<\omega}$是$C(x)$的外网络.

这时，$\langle\varphi_n\rangle_{n\in N}$叫$X$的**标准(强)$\Sigma$-网络**. 而$\langle F(s(x)|\bar{n})\rangle_{n<\omega}$叫$x$处的**局部(强)$\Sigma$-网络**.

证　设$\langle\zeta_n\rangle_{n=1}^{\infty}$是$X$的任意$\Sigma$-网络. $\forall n\in N$，令

$$\zeta_n^1=\{X\}\cup\{\bigcap\xi:\xi\in[\zeta_n]^{<\omega}\setminus\{\varnothing\}\}.$$

则ζ_n^1是X的局部有限闭覆盖，$X\in\zeta_n^1$且ζ_n^1对有限交封闭. 设$\zeta_n^1=\{H_{n\alpha}:\alpha\in S_n\}$. 令$\Omega=\bigcup_{n\in N}S_n$. 不妨设$i\neq j$时$S_i\cap S_j=\varnothing$. 又$\forall\alpha\in\Omega\setminus S_n$，令$H_{n\alpha}=\varphi$. 则$\zeta'_n=\{H_{n\alpha}:\alpha\in\Omega\}$. $\forall n\in N$，令$\varphi_n=\{F(s):s\in{}^{\bar{n}}\Omega\}$，其中$F(s)=\bigcap_{i\leq n}H_{is(i)}$. 则

(a)　φ_n是X的局部有限闭覆盖且对有限交是封闭的. $\forall s\in{}^{\bar{n}}\Omega$，因$X\in\zeta'_n$，设$X=H_{na}, a\in\Omega$. 则$t=s+a\in{}^{\overline{n+1}}\Omega$.

$F(s)=\bigcap_{i\leqslant n}H_{is(i)}\cap X=\bigcap_{i\leqslant n+1}H_{it(i)}=F(t)\in\varphi_{n+1}$. 故 $\varphi_n\subset\varphi_{n+1}$.

(b)　设 $s\in{}^n\Omega$. 因 ζ'_n 覆盖 X，有

$$\bigcup\{F(s\dotplus\alpha):\alpha\in\Omega\}=\bigcup\{\bigcap_{i\leqslant n}H_{is(i)}\cap H_{n+1,\alpha}:\alpha\in\Omega\}$$

$$=\bigcap_{i\leqslant n}H_{is(i)}=F(s).$$

(c)　$\forall x\in X\forall n\in N$，$\zeta_n$ 在 x 处局部有限，$\bigcap(\zeta_n)_x\in\zeta'_n$. 设 $\bigcap(\zeta_n)_x=H_{n\alpha_n(x)}$. $\forall n\in N$，定义 $s(x)(n)=\alpha_n(x)$，则 $s(x)\in{}^N\Omega$.

(c.1)　$x\in\bigcap_{n\in N}(H_{1s(x)(1)}\cap\cdots\cap H_{ns(x)(n)})$

$$=\bigcap_{n\in N}F(s(x)|\bar{n})=C(x).$$

$C(x)=\bigcap_{n\in N}H_{ns(x)(n)}=\bigcap_{n\in N}(\bigcap(\zeta_n)_x)$ 是可数紧(紧)的.

(c.2)　因 $\langle\bigcap(\zeta_n)_x\rangle_{n\in N}$ 是 $C(x)$ 的外网络，且 $\bigcap(\zeta_n)_x=H_{ns(x)(n)}$，则 $\langle F(s(x)|\bar{n})\rangle_{n\in N}$ 是 $C(x)$ 的外网络. 证毕.

3.4.7　定理　设 $\forall n<\omega$，X_n 是强 Σ-空间，则 $X=\prod_{n<\omega}X_n$ 是强 Σ-空间.

证　设 $\forall n<\omega$，$\langle\varphi_i^n\rangle_{i<\omega}$ 是 X_n 的强 Σ—网络. $\forall n<\omega$，$s\in\omega^{n+1}$，令

$$\varphi(s)=\{\bigcap_{i=0}^{n}p_i^{-1}[F_i]:\forall i\leqslant n,F_i\in\varphi_{s_i}^i\}$$

其中 $p_i:X\to X_i$ 表投射. 则 $\varphi(s)$ 是 X 的局部有限闭覆盖，$\forall x\in X$，令

$$C(x)=\bigcap\{\bigcap(\varphi(s))_x:s\in\bigcup_{n<\omega}\omega^{n+1}\},$$

$$C(x_n)=\bigcap\{\bigcap(\varphi_i^n)_{x_n}:i<\omega\},n<\omega.$$

因每个 $C(x_n)$ 是 X_n 的紧子集，$C(x)=\prod_{n<\omega}C(x_n)$ 是 X 的紧子集. 设 $x\in X$，且 $\zeta=\{H(s):s\in\bigcup_{n<\omega}\omega^{n+1}\}$ 是 X 内的具有有限交性质的闭集族，使得 $H(s)\subset\bigcap(\varphi(s))_x$. 下证 $\bigcap\zeta$ 是不空紧子集，结果 X 是强 Σ-空间.

事实上，$\bigcap\zeta$ 是闭集且为紧子集 $C(x)$ 的子集，因而是紧的. 为证 $\bigcap\zeta$ 是不空的，先证

若 L 是 ζ 的有限多个元的交，则

$$L\cap C(x)\neq\varnothing \tag{1}.$$

反证. 若 $L\cap C(x)=\varnothing$，则 $\prod_{n<\omega}C(x_n)\subset X\setminus L$. 据蒲保明等[1985]4.2.17，$\exists n<\omega\ \forall i\leqslant n\ \exists U_i\in N(C(x_i))$ 使得 $\bigcap_{i=0}^{n}p_i^{-1}[U_i]\subset X\setminus L$. 因 $\langle\bigcap(\varphi_k^i)_{x_i}\rangle_{k<\omega}$ 是 $C(x_i)$ 的外网络，$\exists s_i<\omega$，使得 $\bigcap(\varphi_{s_i}^i)_{x_i}\subset U_i$. 则

$$L\cap H(s)\subset L\cap\bigcap(\varphi(s))_x=L\cap\bigcap_{i=0}^{n}p_i^{-1}[\bigcap(\varphi_{s_i}^i)x_i]$$

$$\subset L\cap\bigcap_{i=0}^{n}p_i^{-1}[U_i]=\varnothing.$$

这与 ζ 具有有限交性质相矛盾. (1)真.

由(1)知，$\{C(x)\cap H:H\in\zeta\}$ 是紧子集 $C(x)$ 内的具有有限交性质的闭集族，故

$\bigcap\zeta=\bigcap\zeta\cap C(x)=\bigcap\{C(x)\cap H:H\in\zeta\}\neq\varnothing$. 证毕.

3.4.8 引理 设 X 是正则的强 Σ-空间. 若 X 有强 Σ-网络 $\langle\varphi_n=\{F_{n\alpha}:\alpha\in A_n\}\rangle_{n<\omega}$ 和一列局部有限开覆盖 $\langle\xi_n=\{U_{n\alpha}:\alpha\in A_n\}\rangle_{n<\omega}$，使得 $\forall n<\omega\forall\alpha\in A_n$，$F_{n\alpha}\subset U_{n\alpha}$，则 X 是仿紧的.

证 不妨设每个 φ_n 对有限交封闭且 $\varphi_n\subset\varphi_{n+1}$. 设 ζ 是 X 的开覆盖. $\forall x\in X$，$C(x)=\bigcap_{n<\omega}(\bigcap(\varphi_n)_x)$ 是紧的，存在有限子族 $\zeta(x)\subset\zeta$，使得 $C(x)\subset\bigcup\zeta(x)$. $\forall n<\omega$，令

$$\theta_n=\{F\in\varphi_n:\exists x\in X, F\subset\bigcup\zeta(x)\}$$

$\forall x\in X$，因 $C(x)\subset\bigcup\zeta(x)$，$\exists n<\omega$，$\bigcap_{n<\omega}(\varphi_n)_x\subset\bigcup\zeta(x)$. $\bigcap(\varphi_n)_x\in\varphi_n$，$x\in\bigcap(\varphi_n)_x\in\theta_n$，则 $\theta=\bigcup_{n<\omega}\theta_n$ 是 X 的 σ-局部有限闭覆盖.

$\forall n<\omega$，设 $\theta_n=\{F_{n\alpha}:\alpha\in B_n\}$，$B_n\subset A_n$. $\forall\alpha\in B_n\exists x_{n\alpha}\in X$，使得 $F_{n\alpha}\subset\bigcup\zeta(x_{n\alpha})$. 令

$$\eta_n=\{U_{n\alpha}\cap G:G\in\zeta(x_{n\alpha}),\alpha\in B_n\}.$$

因 ξ_n 局部有限且 $\zeta(x_{n\alpha})$ 有限，η_n 是局部有限开集族. $\forall x\in X$ $\exists n<\omega$

$\exists\alpha\in B_n$，使得 $x\in F_{n\alpha}$. 因 $F_{n\alpha}\subset\bigcup\zeta(x_{n\alpha})$，$\exists G\in\zeta(x_{n\alpha})$，$x\in G$. 又 $x\in F_{n\alpha}\subset U_{n\alpha}$，则 $x\in U_{n\alpha}\cap G\in\eta_n$. 因此知 $\bigcup_{n<\omega}\eta_n$ 是 ζ 的 σ-局部有限开加细. X 是仿紧空间. 证毕.

3.4.9　定理　(Nagami[1969]) 设 $\forall n<\omega$，X_n 是 T_2 仿紧的 Σ-空间. 则 $X=\prod_{n<\omega}X_n$ 是 T_2 仿紧的 Σ-空间.

证　因可数紧的仿紧闭子空间是紧的，每个 X_n 是强 Σ-空间. 据3.3.7，X 是强 Σ-空间. 显然 X 是 T_2 的. 现证它还是仿紧的. $\forall n<\omega$，设 $\langle\varphi_i^n\rangle_{i<\omega}$ 是 X_n 的强 Σ-网络. 设 $\varphi_i^n=\{F(n,i,\alpha):\alpha\in A_i^n\}$. 因 X_n 是可膨胀的，它有局部有限开覆盖 $\zeta_i^n=\{U(n,i,\alpha):\alpha\in A_i^n\}$，使得 $F(n,i,\alpha)\subset U(n,i,\alpha)$.

$\forall n<\omega$，$s\in\omega^{n+1}$，令

$$\varphi(s)=\{\bigcap_{i=0}^{n}p_i^{-1}[F(i,s_i,\alpha_i)]:\forall i\leqslant n,\alpha_i\in A_{s_i}^i\},$$

$$\zeta(s)=\{\bigcap_{i=0}^{n}p_i^{-1}[U(i,s_i,\alpha_i)]:\forall i\leqslant n,\alpha_i\in A_{s_i}^i\},$$

其中 $p_i:X\to X_i$ 表投射. 则 $\langle\varphi(s):s\in\bigcup_{n<\omega}\omega^{n+1}\rangle$ 是 X 的强 Σ-网络，且每个 $\zeta(s)$ 是 X 的局部有限开覆盖，使得 $\forall n<\omega\forall s\in\omega^{n+1}\forall i\leqslant n$，$\alpha_i\in A_{s_i}^i$. 有

$$\bigcap_{i=0}^{n}p_i^{-1}[F(i,s_i,\alpha_i)]\subset\bigcap_{i=0}^{n}p_i^{-1}[U(i,s_i,\alpha_i)].$$

由前一引理知，X 是仿紧的. 证毕.

下面我们约定一些记号，设 $\{X_\alpha:\alpha\in S\}$ 是一族空间. 记 $X=\prod_{\alpha\in S}X_\alpha$. 设 $\varnothing\neq B\subset S$，且 $\forall\alpha\in B$，$U_\alpha\subset X_\alpha$. 记 $U_B=\prod_{\alpha\in B}U_\alpha$.

$\forall x\in X$，定义 $p_B(x)=x|B$. 则函数 $p_B:X\to X_B$ 叫 X 到 X_B 上的投射，它是满的. $p_{\{\alpha\}}$ 简记为 p_α，即通常的投射. 显然有

$$p_B^{-1}[U_B]=\bigcap_{\alpha\in B}p_\alpha^{-1}[U_\alpha].$$

其次，若 $A\subset B\subset S$，函数 $p_A^B:X_B\to X_A$ 定义为 $\forall x\in X_B$，$p_A^B(x)=x|A$.

笛卡尔积 $X=\prod_{\alpha\in S}X_\alpha$ 上的积拓扑是以

$$\eta=\{p_B^{-1}[U_B]:B\in[S]^{<\omega}\setminus\{\varnothing\},\forall\alpha\in B,U_\alpha\text{开于 }X_\alpha\}$$

为基生成的拓扑. X 上赋予这种拓扑后叫**积空间**. η 的元叫 X 的**基本开集**.

显然,每个投射 $p_B:X\twoheadrightarrow X_B$ 是开的满映射,$B\in[S]^{<\omega}\setminus\{\varnothing\}$. 若 $M\subset X$ 且 U 是 X 的基本开集,把 $M\cap U$ 称为**子空间 M 的基本开集**.

让 N 表正整数集并赋予离散拓扑. 它是可度量的. 于是积空间 N^ω 是可度量的. 然而不可数多个可度量空间的积空间不必是可度量的,甚至不正规.

3.4.10　例(Stone[1948]) N^{ω_1} 不正规.

证　记 $X=N^{\omega_1}$. $\forall x\in X,i\in N$,令

$B(x,i)=\{\alpha<\omega_1:x_\alpha=i\}$,

$A=\{x\in X:\forall i\in N\setminus\{1\},|B(x,i)|\leqslant1\}$,

$B=\{x\in X:\forall i\in N\setminus\{2\},|B(x,i)|\leqslant1\}$.

则 A,B 不相交且是无限的闭子集. 用反证法证明 X 不正规.

若 X 是正规的,它应有开集 U,使得

$$A\subset U\subset\overline{U}\subset X\setminus B.$$

令 $\xi=\{\eta:\eta$ 是由包含于 U 内的 X 的基本开集组成的互不相交族$\}$. 因 X 是 T_2 的,$\xi\neq\varnothing$ 且由 Zorn 引理知,偏序集 $(\xi,\subset)$ 有一个极大元 η. 因 X 是 ccc 空间. η 是可数的. 设 $\eta=\{p_{B_n}^{-1}[U_{B_n}]:n<\omega\}$,其中 $B_n\in[\omega_1]^{<\omega}\setminus\{\varnothing\}$. $\forall\alpha\in B_n,U_\alpha$ 开于 X_α. $U_{B_n}=\prod_{\alpha\in B_n}U_\alpha$. $p_{B_n}:X\twoheadrightarrow X_{B_n}$ 是投射. $B=\bigcup_{n<\omega}B_n$ 是可数的且 $p_B^{-1}\circ p_B\circ p_{B_n}^{-1}=p_{B_n}^{-1}[U_{B_n}]$,从而 $p_B^{-1}\circ p_B[\bigcup\eta]=\bigcup\eta$. 因 P_B 是连续开映射,$p_B^{-1}\circ p_B[\overline{\bigcup\eta}]=\overline{\bigcup\eta}$. 又由 η 的极大性知,$\overline{U}=\overline{\bigcup\eta}$. 则有

$$p_B^{-1}\circ p_B[\overline{U}]=\overline{U}.\tag{1}$$

设 $B=\{\alpha_n:n<\omega\}$. 定义 $t\in X_B$ 为：$\forall n<\omega, t_{\alpha_n}=n+3$. 定义 $x,y\in X$ 如下：

$$x|B=t \text{ 且 } \forall\alpha\in\omega_1\backslash B, x_\alpha=1,$$

$$y|B=t \text{ 且 } \forall\alpha\in\omega_1\backslash B, y_\alpha=2.$$

则 $y\in B, x\in A\in\overline{U}, p_B(y)=t=p_B(x)\in p_B[\overline{U}]$. 由(1)知，$y\in\overline{U}\subset X\backslash B$，矛盾. 故 X 不正规. 证毕.

3.4.11　系　设 $|S|\geqslant\omega_1$ 且 $\forall\alpha\in S$, X_α 是不空的 T_1 空间. 若 $X=\prod_{\alpha\in S}X_\alpha$ 是正规的，则 X 至多有可数多个因子空间不是可数紧的.

证　反证. 若 S 有一个不可数子集 S_1，使得 $\forall\alpha\in S_1$, X_α 不是可数紧的，则 X_α 有可数无限子集 M_α 没有聚点. M_α 是 X_α 的闭子集且与 N 同胚. X 有一个闭子空间与 N^{ω_1} 同胚. 据3.4.10，X 不正规，矛盾. 证毕.

由于不可数多个度量空间的积空间不必是正规的，且正规积具有系3.4.11的性质，我们转向考虑下列 Σ-积的正规性.

3.4.12　定义　(Corson[1959])　设 $X=\prod_{\alpha\in S}X_\alpha$ 是积空间，$b\in X$ 是任意一个固定点. $\forall x\in X$，令

$$\mathrm{supp}(x)=\{\alpha\in S: x_\alpha\neq b_\alpha\}.$$

则 X 的子空间

$$\Sigma(b,X_\alpha,S)=\{x\in X:|\mathrm{supp}(x)|\leqslant\omega\}$$

称为空间族 $\{X_\alpha:\alpha\in S\}$ 的以 b 为**基点的 Σ-积**，简记为 X^b.

这时，若 $B\subset S$, $p_B:X\to X_B$ 表投射，把函数

$$\pi_B=p_B|X^b:X^b\to X_B$$

叫 X^b 到 X_B 的**投射**.

当 $|B|\leqslant\omega$ 时，X_B 称为 X^b 的**可数子积**；当 $|B|<\omega$ 时，称为**有限子积**.

X^b 的一个子集 G 称为 B-**柱形集**，如果

$$G=\pi_B^{-1}\circ\pi_B[G].$$

3.4.13　引理　设 $X=\prod_{\alpha\in S}X_\alpha, X^b=\Sigma(b,X_\alpha,S)$，则

（Ⅰ）　$\forall B\subset S, 0<|B|\leqslant\omega$，有

$$X^b=X_B\times\pi_{(S\setminus B)}[X^b],$$

从而 $\pi_B: X^b\to X_B$ 是开的满映射.

（Ⅱ）　若 $\varnothing\neq A\subset B\subset S$ 且 $|S|\leqslant\omega$，则对每个 $G\subset X_A$，有

$$\pi_B\circ\pi_A^{-1}[G]=(p_A^B)^{-1}[G].$$

证　（Ⅰ）设 $x\in X^b$，则 $x|B\in X_B, x|(S\setminus B)\in\pi_{(S\setminus B)}[X^b]$. 反之，设 $x\in X_B\times\pi_{(S\setminus B)}[X^b]$，则 $\exists y\in X^b$，使得

$$x|(S\setminus B)=\pi_{(S\setminus B)}(y)=y|(S\setminus B).$$

$\mathrm{supp}(x)=\{\alpha\in B: x_\alpha\neq b_\alpha\}\cup\{\alpha\in S\setminus B: x_\alpha\neq b_\alpha\}\subset B\cup\mathrm{supp}(y)$.

因 $|\mathrm{supp}(y)|\leqslant\omega$，则 $|\mathrm{supp}(x)|\leqslant\omega$. 因此 $x\in X^b$. 从而 $X^b=X_B\times\pi_{(S\setminus B)}[X^b]$. $\pi_B[X^b]=X_B$，π_B 是满映射. 现设 $p_B^{-1}[U_B]$是 X 的任一基本开集，其中 $B\subset S, 0<|B|<\omega$，U_B 开于 X_B. 则 $X^b\cap p_B^{-1}[U_B]=\pi_B^{-1}[U_B]$ 是 X^b 的基本开集. 因 π_B 是满的，$\pi_B[X^b\cap p_B^{-1}[U_B]]=U_B$ 开于 X_B. π_B 是开映射.

（Ⅱ）由（Ⅰ）直接可证. 证毕.

3.4.14　定义　设 X 是任一空间.

（Ⅰ）　$\forall x\in X$，

$$\chi(x,X)=\min\{|\eta|:\eta\text{ 是 }x\text{ 的邻域基}\}.$$

（Ⅱ）　$\chi(X)=\omega+\sup\{\chi(x,X): x\in X\}$叫空间 X 的**特征**.

（Ⅲ）　X 是**第一可数的**如果 $\chi(X)=\omega$.

3.4.15　定义　设 X 是任一空间.（Ⅰ）　$\forall x\in X, t(x,X)=\min\{\kappa:\forall A\subset X(x\in\overline{A}\to\exists M\subset A(|M|\leqslant\kappa\wedge x\in\overline{M}))\}$.

（Ⅱ）　$t(X)=\omega+\sup\{t(x,X): x\in X\}$叫空间 X 的**紧密度**.

(Ⅱ)　空间 X 具有可数紧密度，如果 $t(X)=\omega$.

由定义直接知，若 $A\subset X$，则

$$\chi(A)\leqslant\chi(X),\quad t(A)\leqslant t(X).$$

3.4.16　引理　设 X 是任意空间，则 $\forall x\in X, t(x,X)\leqslant\chi(x,X)$. 结果 $t(X)\leqslant\chi(X)$.

证　令 $\kappa=\chi(x,X)$. 设 ξ_x 是 $N(x)$ 的一个势为 κ 的基，且设 $A\subset X$，使得 $x\in\overline{A}$. $\forall U\in\xi_x\exists y(U)\in A\cap U$. 令 $M=\{y(U):U\in\xi_x\}$，则 $|M|\leqslant|\xi_x|=\kappa$，且 $x\in\overline{M}$. 故 $t(x,X)\leqslant\kappa=\chi(x,X)$. 证毕.

3.4.17　引理　设 $X=\prod\limits_{\alpha\in S}X_\alpha$ 是积空间. 若对每个有限子集 $B\subset S$，$t(X_B)\leqslant\kappa$，则

$$t(X)\leqslant\max\{\kappa,|S|\}.$$

证　设 $x\in X, A\subset X$，使得 $x\in\overline{A}$. 则 $\forall B\in[S]^{<\omega}\backslash\{\varphi\}$，有

$$p_B(x)\in p_B[\overline{A}]\subset Cl_{X_B}(p_B[A]).$$

由假设 $t(X_B)\leqslant\kappa$，则 $\exists M(B)\subset A$，使得 $|M(B)|\leqslant\kappa$ 且 $p_B(x)\in Cl_{X_B}(p_B[M(B)])$. 令

$$M=\bigcup\{M(B):B\in[S]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}\}.$$

则 $M\subset A$. $|M|\leqslant\kappa\cdot|S|=\max\{\kappa,|S|\}$. 易知 $x\in\overline{M}$. 故 $t(X)\leqslant\max\{\kappa,|S|\}$. 证毕.

3.4.18　定理　(Kombarov and Malyhin[1973]) 设 $X^b=\Sigma(b,X_\alpha,S)$ 是 Σ-积，则下列各条等价：

(Ⅰ)　$t(X^b)=\omega$.

(Ⅱ)　X^b 的每个有限子积具有可数紧密度.

(Ⅲ)　X^b 的每个可数子积具有可数紧密度.

证　(Ⅰ)→(Ⅱ) $\forall B\in[S]^{<\omega}\backslash\{\varnothing\}$，由3.4.14知，$X^b=X_B\times\pi_{(S\backslash B)}[X^b]$. 于是 X_B 与 X^b 的一个子空间同胚，从而

$$\omega\leqslant t(X_B)\leqslant t(X^b)=\omega,\quad t(X_B)=\omega.$$

（Ⅰ）→（Ⅱ）　只需在前一引理中令 $|S|=\kappa=\omega$.

（Ⅱ）→（Ⅰ）　设 $x\in X^b$ 且 $A\subset X^b$，使得 $x\in\overline{A}$. 先证

论断1　$\forall n<\omega\ \exists B_n\subset S\ \exists M_n\subset A$ 满足下列条件：

(a)　$0<|B_n|,|M_n|\leqslant\omega$;

(b)　$B_0\supset\operatorname{supp}(x)$ 且 $\forall n<\omega$,

$$B_{n+1}=B_n\cup\bigcup\{\operatorname{supp}(a):a\in M_n\}.$$

(c)　$\forall n<\omega,\pi_n(x)\in\overline{\pi_n[M_n]}$，其中

$$\pi_n=\pi_{B_n}:X^b\to X_{B_n}$$

表投射.

证　任取 $\alpha_0\in S$，令 $B_0=\{\alpha_0\}\cup\operatorname{supp}(x)$. 则 $0<|B_0|\leqslant\omega,B_0\subset S$. $\pi_0(x)\in\pi_0[\overline{A}]\subset\overline{\pi_0[A]}$. 由假设（Ⅱ），$t(X_{B_0})=\omega$. $\exists M_0\subset A$，使得 $|M_0|\leqslant\omega$ 且 $\pi_0(x)\in\overline{\pi_0[M_0]}$. 令

$$B_1=B_0\cup\bigcup\{\operatorname{supp}(a):a\in M_0\},$$

则 $M_0\subset S$. 因 $M_0\subset X^b$，$0<|B_1|\leqslant\omega$.

现设 $n<\omega$ 且设 $\forall i\leqslant n$ 已构成 B_i 与 M_i 满足(a)—(c). 令

$$B_{n+1}=B_n\cup\bigcup\{\operatorname{supp}(a):a\in M_n\}.$$

因 $\pi_{n+1}(x)\in\overline{\pi_{n+1}(A)}$ 且 $t(X_{B_{n+1}})=\omega$，$\exists M_{n+1}\subset A$，使得 $|M_{n+1}|\leqslant\omega$ 且 $\pi_{n+1}(x)\in\overline{\pi_{n+1}[M_{n+1}]}$. 令

$$B_{n+2}=B_{n+1}\cup\bigcup\{\operatorname{supp}(a):a\in M_{n+1}\}.$$

归纳法完成，论断1真.

令 $B=\bigcup_{n<\omega}B_n$，$M=\bigcup_{n<\omega}M_n$. 则 $|M|\leqslant\omega$. 只需再证

$$x\in\overline{M}.\tag{1}$$

设 U 是 X^b 的基本开集，使得 $x\in U$. 这样，需证 $U\cap M\neq\varphi$ 即可.

事实上，$\prod_{\alpha\in S}X_\alpha$ 有基本开集 $U'=p_D^{-1}[U_D]$，使得 $U=X^b\cap U'$，此处 $\varnothing\neq D\subset S$，$|D|<\omega$. $U_D=\prod_{\alpha\in D}U_\alpha$，每个 U_α 开于 X_α.

情形 I　若 $E=D\cap B\neq\varnothing$，因 E 有限且 $\langle B_n\rangle$ 上升，$\exists n<\omega$，使得 $E\subset B_n$. 则

$$U'=U_E\times X_{(B_n\setminus E)}\times X_{(B\setminus B_n)}\times p_{(S\setminus B)}[U'],$$

$$U=U_E\times X_{(B_n\setminus E)}\times X_{(B\setminus B_n)}\times(p_{(S\setminus B)}[U']\cap\pi_{(S\setminus B)}[X^b]).$$

因 $x\in U$，$V=U_E\times X_{(B_n\setminus E)}$ 是 $\pi_n(x)$ 在 X_{B_n} 内的邻域. 因 $\pi_n(x)\in\overline{\pi_n[M_n]}$，$\exists a\in M_n$，

$$\pi_n(a)=a|B_n\in V. \tag{2}$$

因 $a\in M_n$，

$$\mathrm{supp}(a)\cup\mathrm{supp}(x)\subset B_{n+1}\cup B_0\subset B.$$

$$a|(S\setminus B)=x|(S\setminus B)\in P_{(S\setminus B)}[U']\cap\pi_{(S\setminus B)}[X^b]. \tag{3}$$

由(2)，(3)知，$a\in U$. 又 $a\in M_n\subset M$，$U\cap M\neq\varnothing$.

情形 II　若 $D\cap B=\varnothing$，则

$$U'=X_{B_1}\times X_{(B\setminus B_1)}\times(P_{(S\setminus B)}[U'],$$

$$U=X_{B_1}\times X_{(B\setminus B_1)}\times(p_{(S\setminus B)}[U']\cap\pi_{(S\setminus B)}[X^b]).$$

因 $\pi_1(x)\in\overline{\pi_1[M_1]}$ 且 X_{B_1} 是 $\pi_1(x)$ 的邻域，$\exists a\in M_1$，使得

$$\pi_1(a)=a|B_1\in X_{B_1}. \tag{2'}$$

因 $a\in M_1$，$\mathrm{supp}(a)\cup\mathrm{supp}(x)\subset B_2\cup B_0\subset B$，

$$a|(S\setminus B)=x|(S\setminus B)\in p_{(S\setminus B)}[U']\cap\pi_{(S\setminus B)}[X^b]. \tag{3'}$$

由(2′)，(3′)知，$a\in U$. 又 $a\in M_1\subset M$，$U\cap M\neq\varnothing$. 故(1)真. 证毕.

3.4.19　系　若 X^b 是由第一可数空间族构成的 Σ-积，则 X^b 具有可数紧密度.

证　由3.4.18定理及蒲保明等[1985]3.2.22可证.

3.4.20　定义　(I) $S=\langle X_j,\varphi_j^i\rangle$ 是一个**逆向序列**，如果它满足下列条件：

(a)　$\forall j<\omega$，X_j 是拓扑空间；

(b)　$\forall i,j<\omega$，若 $j\leqslant i$，则 $\varphi_j^i:X_i\to X_j$ 连续且满足

(b.1)　$\forall i<\omega,\varphi_i^i=\mathrm{id}_{X_i}$.

(b.2)　$\forall k\leqslant j\leqslant i,\varphi_k^j\circ\varphi_j^i=\varphi_k^i$.

(Ⅰ)　设 $S=\langle X_j,\varphi_j^i\rangle$ 是一个逆向序列，则集

$$\varprojlim S=\{x\in\prod_{n<\omega}X_n:\forall j\leqslant i,\varphi_j^i(x_i)=x_j\}$$

作为积空间 $\prod_{n<\omega}X_n$ 的子空间称为 S 的**极限**.

3.4.21　引理　设 $S=\langle X_j,\varphi_j^i\rangle$ 是逆向序列且每个 X_j 是 T_2 空间，则 $\varprojlim S$ 是 $\prod_{n<\omega}X_n$ 的闭子集.

证　$\forall j\leqslant i$，令

$$M_j^i=\{x\in\prod_{n<\omega}X_n:\varphi_j^i(x_i)=x_j\}$$
$$=\{x\in\prod_{n<\omega}X_n:\varphi_j^i\circ p_i(x)=p_j(x)\}.$$

其中 $p_n:\prod_{i<\omega}X_i\to X_n$ 表投射. 由蒲保明等[1985]3.1.6知，每个 M_j^i 是闭集. 则

$$\varprojlim S=\bigcap\{M_j^i:0\leqslant j\leqslant i\}$$

是闭集. 证毕.

3.4.22　引理　设 $S=\langle X_j,\varphi_j^i\rangle$ 是逆向序列且每个 X_j 是不空的 T_2 紧空间，则 $X=\varprojlim S$ 是不空的 T_2 紧空间.

证　$\forall n<\omega$，固定之. $\forall j\leqslant n$，令

$$M_j^n=\{x\in\prod_{i<\omega}X_i:\varphi_j^n(x_n)=x_j\},$$

则每个 M_j^n 闭于 $\prod_{i<\omega}X_i$. 易见 $F_n=\bigcap_{j\leqslant n}M_j^n$ 是 $\prod_{i<\omega}X_i$ 的不空闭子集，使得 $F_{n+1}\subset F_n$. $\{F_n:n<\omega\}$ 是紧空间 $\prod_{i<\omega}X_i$ 内的具有有限交性质的闭集族，从而 $X=\bigcap\{F_n:n<\omega\}\neq\varnothing$. 又由3.4.21知，$X$ 是 T_2 紧空间 $\prod_{i<\omega}X_i$ 的闭子集，从而它自己是 T_2 紧的. 证毕.

3.4.23　引理　设 X 是正规空间，A_1,A_2,B 是 X 的闭子集，使

得 $A_1\cap A_2\cap B=\varnothing$. 则对每个 $U\in N(B)$, X 有开集 V_1,V_2, 使得

$$B\subset V_1\cup V_2\subset U \text{ 且 } \overline{V}_i\cap A_i=\varnothing, i=1,2.$$

证 由假设知, $\xi=\{X\backslash B, X\backslash A_1, X\backslash A_2\}$ 是 X 的开覆盖. 于是 ξ 有一个收缩 $\eta=\{H_0,H_1,H_2\}$. 设 $\overline{H}_0\subset X\backslash B$, $\overline{H}_i\subset X\backslash A_i$, $i=1,2$. 令 $V_i=H_i\cap U$, $i=1,2$. 则

$$B\subset V_1\cup V_2\subset U \text{ 且 } \overline{V}_i\cap A_i=\varnothing, i=1,2.$$

证毕.

设 $n\in N$ 且设 $\forall i=1,2,\cdots,n$, $s_i: N\to A$. 则 n-阶方阵

$$\xi_n=\begin{pmatrix} s_1(1) & s_1(2)\cdots s_1(n)\\ s_2(1) & s_2(2)\cdots s_2(n)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ s_n(1) & s_n(2)\cdots s_n(n)\end{pmatrix}$$

简记为 $(s_i(j))_n$. 当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时, 则记

$$\xi_n|k=\begin{pmatrix} s_1(1)\cdots s_1(k)\\ \cdots\cdots\\ s_k(1)\cdots s_k(k)\end{pmatrix},$$

即由 ξ_n 的前 k 行 k 列的元构成的方阵.

3.4.24 定理 (Yajima[1984]) 设 $X^b=\Sigma(b,X_\alpha,S)$ 是由 T_2 仿紧 Σ-空间 $X_\alpha(\alpha\in S)$ 构成的 Σ-积且 X^b 具有可数紧密度, 则 X^b 是正规的.

证 设 A,B 是 X^b 内的不相交闭集. 令 $\xi_0=\varnothing$, $\theta_0=(\xi_0)$. 任取 $\alpha\in S$, 令 $R(\xi_0)=\{\alpha\}$. 先证

论断1 $\forall n\in N$, 存在集族 γ_n, 以 n-阶方阵为元的集 Δ_n,θ_n; $\forall\xi_n\in\theta_n$, 存在集 $R(\xi_n),\Omega(\xi_n)$; $\forall\xi_n\in\Delta_n$, 存在集 $E(\xi_n),G(\xi_n),A(\xi_n),B(\xi_n)$ 及点 $x(\xi_n)$ 满足下列条件:

(a) $\forall\xi_n\in\theta_n$, $R(\xi_n)$ 是 S 的不空可数子集且 $X_{\xi_n}=X_{R(\xi_n)}$ 有标准

的强 Σ-网络：

$$\langle\varphi(\xi_n,m)=\{F(s_{n+1}):s_{n+1}\in{}^{\bar m}\Omega(\xi_n)\}\rangle_{m=1}^{\infty},$$

其中 $\bar m=\{1,2,\cdots,m\}$；

(b)　$\Delta_n=\{\xi_n=(s_i(j))_n:\xi_n|(n-1)=\xi_{n-1}\in\theta_{n-1}$；当 $1\leqslant i\leqslant n-1$ 时，$s_i(n)\in\Omega(\xi_{i-1})$；当 $1\leqslant j\leqslant n$ 时，$s_n(j)\in\Omega(\xi_{n-1})\}$；

(c)　$\forall\xi_n=(s_i(j))_n\in\Delta_n$，

$E(\xi_n)=\bigcap\limits_{k=0}^{n-1}(p^{\xi_n}_{\xi_k})^{-1}[F(s_{k+1}(1),\cdots,s_{k+1}(n))]$，其中 $p^{\xi_i}_{\xi_j}=p^{R(\xi_i)}_{R(\xi_j)}$：$X_{\xi_i}=X_{R(\xi_i)}\to X_{\xi_j}=X_{R(\xi_j)}$ 表投射；

(d)　$\{G(\xi_n):\xi_n\in\Delta_n\}$ 是 X^b 内的 $R(\xi_{n-1})$-柱形开集组成的局部有限族，使得 $E(\xi_n)\subset\pi_{\xi_{n-1}}[G(\xi_n)]$，此处

$$\pi_{\xi_n}=\pi_{R(\xi_n)}:X^b\to X_{\xi_n}$$

表投射．

(e)　γ_n 是 X^b 内的局部有限开集族，使得

$$\forall U\in\gamma_n,\bar U\cap A=\varnothing\text{ 或 }\bar U\cap B=\varnothing.$$

(f)　$\theta_n=\{\xi_n\in\Delta_n:E(\xi_n)\cap\overline{\pi_{\xi_{n-1}}[A]}\cap\overline{\pi_{\xi_{n-1}}[B]}\neq\varnothing\}$，$\theta_n^*=\{\xi_n\in\Delta_n:\pi^{-1}_{\xi_{n-1}}[E(\xi_n)]\setminus\bigcup\gamma_n\neq\varnothing\}$ 且 $\theta_n^*\subset\theta_n$．

(g)　$\forall\xi_n\in\theta_n$，存在不空可数子集 $A(\xi_n)\subset A$ 及 $B(\xi_n)\subset B$，使得存在点 $x(\xi_n)\in E(\xi_n)\cap\overline{\pi_{\xi_{n-1}}[A(\xi_n)]}\cap\overline{\pi_{\xi_{n-1}}[B(\xi_n)]}$，并且

$$R(\xi_n)=R(\xi_{n-1})\cup\bigcup\{\mathrm{supp}(a)\cup\mathrm{supp}(c):a\in A(\xi_n),c\in B(\xi_n)\}.$$

证　对 $\xi_0=\varnothing\in\theta_0$，$X_{\xi_0}=X_{R(\xi_0)}=X_a$ 是是强 Σ-空间．它有标准的强 Σ-网络 $\langle\varphi(\xi_0,m)=\{F(s_1):s_1\in{}^{\bar m}\Omega(\xi_0)\}\rangle_{m=1}^{\infty}$．令 $\Delta_1=\Delta_1(\xi_0)=\{\xi_1=(s_1(1))_1:s_1\in{}^{\bar 1}\Omega(\xi_0)\}$．$\forall\xi_1=(s_1(1))\in\Delta_1$，令 $E(\xi_1)=F(s_1(1))$．则

$$\{E(\xi_1):\xi_1\in\Delta_1\}=\{F(s_1(1)):s_1\in{}^{\bar 1}\Omega(\xi_0)\}$$

是 X_{ξ_0}内的局部有限闭集族. 因 X_{ξ_0}是可膨胀的,它有局部有限开集族$\{H(\xi_1):\xi_1\in\Delta_1\}$,使得 $E(\xi_1)\subset H(\xi_1)$,$\xi_1\in\Delta_1$. 令

$$G(\xi_1)=\pi_{\xi_0}^{-1}[H(\xi_1)],\xi_1\in\Delta_1.$$

它是 $R(\xi_0)$-柱形开集. $E(\xi_1)\subset\pi_{\xi_0}[G(\xi_1)]$并且$\{G(\xi_1):\xi_1\in\Delta_1\}$是 X^b 内的局部有限开集族. 令

$$\theta_1=\{\xi_1\in\Delta_1:E(\xi_1)\cap\overline{\pi_{\xi_0}[A]}\cap\overline{\pi_{\xi_0}[B]}\neq\varnothing\}.$$

$\forall\xi_1\in\Delta_1\setminus\theta_1$, $E(\xi_1)\cap\overline{\pi_{\xi_0}[A]}\cap\overline{\pi_{\xi_0}[B]}=\varnothing$. 因 X_{ξ_0}是正规的且 $E(\xi_1)\subset H(\xi_1)$,据3. 4. 23,X_{ξ_0}内有开集 $V_i(\xi_1)$,$i=1,2$,使得

$$E(\xi_1)\subset V_1(\xi_1)\cup V_2(\xi_1)\subset H(\xi_1),$$

且$\overline{V_1(\xi_1)}\cap\pi_{\xi_0}[A]=\varnothing$,$\overline{V_2(\xi_1)}\cap\pi_{\xi_0}[B]=\varnothing$. 令

$$\gamma_1=\gamma_1(\xi_0)=\{\pi_{\xi_0}^{-1}[V_i(\xi_1)]:i=1,2,\xi_1\in\Delta_1\setminus\theta_1\}.$$

因 $\pi_{\xi_0}^{-1}[V_i(\xi_1)]\subset G(\xi_1)$,$\gamma_1$是 X^b 内的局部有限开集族使得$\forall U\in\gamma_1$,$\overline{U}\cap A=\varnothing$或 $\overline{U}\cap B=\varnothing$. 又令

$$\theta_1^*=\{\xi_1\in\Delta_1:\pi_{\xi_0}^{-1}[E(\xi_1)]\setminus\bigcup\gamma_1\neq\varnothing\}.$$

$\forall\xi_1\in\Delta_1\setminus\theta_1$, $\pi_{\xi_0}^{-1}[E(\xi_1)]\subset\pi_{\xi_0}^{-1}[V_1(\xi_1)\cup V_2(\xi_1)]\subset\bigcup\gamma_1$, $\xi_1\notin\theta_1^*$. 则 $\theta_1^*\subset\theta_1$. $\forall\xi_1\in\theta_1$,任取

$$x(\xi_1)\in E(\xi_1)\cap\overline{\pi_{\xi_0}[A]}\cap\overline{\pi_{\xi_0}[B]},$$

据3. 4. 8,$t(X_{\xi_0})=\omega$,存在可数子集 $A(\xi_1)\subset A$ 及 $B(\xi_1)\subset B$,使得

$$x(\xi_1)\in\overline{\pi_{\xi_0}[A(\xi_1)]}\cap\overline{\pi_{\xi_0}[B(\xi_1)]}.$$

令

$$R(\xi_1)=R(\xi_0)\cup\bigcup\{\mathrm{supp}(a)$$
$$\cup\,\mathrm{supp}(c):a\in A(\xi_1),c\in B(\xi_1)\}.$$

则 $R(\xi_1)$可数. 据3. 4. 9,$X_{\xi_1}=X_{R(\xi_1)}$是 T_2仿紧的 Σ-空间,它有标准的强 Σ-网络:

$$\langle\varphi(\xi_1,m)=\{F(s_2):s_2\in{}^m\Omega(\xi_1)\}\rangle_{m=1}^{\infty}.$$

以上已证明了 $n=1$ 时 (a)—(g) 皆成立.

现设 $n<\omega$ 且设 $\forall i\leqslant n$, 论断1中各集已构成且满足条件 (a)—(g). 于是 $\forall k\leqslant n$, $X_{\xi_k}=X_{R(\xi_k)}$ 有标准的强 Σ-网络:

$$\langle\varphi(\xi_k,m)=\{F(s_{k+1}):s_{k+1}\in{}^{\bar{m}}\Omega(\xi_k)\}\rangle_{m=1}^{\infty}.$$

$\forall\xi_n\in\theta_n$, 固定之. 令 $\Delta_{n+1}(\xi_n)=\{\xi_{n+1}=(s_i(j))_{n+1}:\xi_{n+1}|n=\xi_n$; 当 $1\leqslant i\leqslant n$ 时, $s_i(n+1)\in\Omega(\xi_{i-1})$; 当 $1\leqslant j\leqslant n+1$ 时, $s_{n+1}(j)\in\Omega(\xi_n)\}$.

$\forall\xi_{n+1}=(s_i(j))_{n+1}\in\Delta_{n+1}(\xi_n)$, 定义

$$E(\xi_{n+1})=\bigcap_{k=0}^{n}(P^{\xi_n}_{\xi_k})^{-1}[F(s_{k+1}(1),\cdots,s_{k+1}(n+1))].$$

则 $\{E(\xi_{n+1}):\xi_{n+1}\in\Delta_{n+1}(\xi_n)\}$ 是 X_{ξ_n} 内的局部有限闭集族. 由3. 4. 13及归纳法假设 (d) 知,

$$E(\xi_{n+1})\subset\pi_{\xi_n}[G(\xi_n)].$$

因 π_{ξ_n} 是开映射且 X_{ξ_n} 是可膨胀的, 它有局部有限开集族 $\{H(\xi_{n+1}):\xi_{n+1}\in\Delta_{n+1}(\xi_n)\}$, 使得 $\forall\xi_{n+1}\in\Delta_{n+1}(\xi_n)$,

$$E(\xi_{n+1})\subset H(\xi_{n+1})\subset\pi_{\xi_n}[G(\xi_n)].$$

令 $G(\xi_{n+1})=\pi_{\xi_n}^{-1}[H(\xi_{n+1})]$, 它是 $R(\xi_n)$-柱形开集且 $\{G(\xi_{n+1}):\xi_{n+1}\in\Delta_{n+1}(\xi_n)\}$ 是 X^b 内的局部有限开集族. $G(\xi_n)$ 是 $R(\xi_{n-1})$-柱形开集, 也是 $R(\xi_n)$-柱形开集. 则

$$G(\xi_{n+1})=\pi_{\xi_n}^{-1}[H(\xi_{n+1})]\subset\pi_{\xi_n}^{-1}\circ\pi_{\xi_n}[G(\xi_n)]=G(\xi_n).\qquad(1)$$

且 $E(\xi_{n+1})\subset H(\xi_{n+1})=\pi_{\xi_n}[G(\xi_{n-1})]$. 令

$$\theta_{n+1}(\xi_n)=\{\xi_{n+1}\in\Delta_{n+1}(\xi_n):E(\xi_{n+1})\cap\overline{\pi_{\xi_n}[A]}\cap\overline{\pi_{\xi_n}[B]}\neq\varnothing\}.$$

$\forall\xi_{n+1}\in\Delta_{n+1}(\xi_n)\setminus\theta_{n+1}(\xi_n)$,

$$E(\xi_{n+1})\cap\overline{\pi_{\xi_n}[A]}\cap\overline{\pi_{\xi_n}[B]}=\varnothing \text{ 且 } E(\xi_{n+1})\subset H(\xi_{n+1}).$$

X_{ξ_n} 是 T_2 仿紧 Σ-空间, 它是正规的. 据3. 4. 23, X_{ξ_n} 内有开集 $V_i(\xi_{n+1})$, $i=1,2$, 使得 $E(\xi_{n+1})\subset V_1(\xi_{n+1})\cup V_2(\xi_{n+1})\subset H(\xi_{n+1})$, 且

$$\overline{V_1(\xi_{n+1})} \cap \pi_{\xi_n}[A] = \varnothing, \overline{V_2(\xi_{n+1})} \cap \pi_{\xi_n}[B] = \varnothing.$$

令

$$\gamma_{n+1}(\xi_n) = \{\pi_{\xi_n}^{-1}[V_i(\xi_{n+1})]: i = 1,2,$$
$$\xi_{n+1} \in \Delta_{n+1}(\xi_n)\setminus\theta_{n+1}(\xi_n)\}.$$

则它是 X^δ 内的局部有限开集族，使得

$$\forall U \in \gamma_{n+1}(\xi_n), \overline{U} \cap A = \varnothing \text{ 或 } \overline{U} \cap B = \varnothing.$$

令

$$\theta_{n+1}^*(\xi_n) = \{\xi_{n+1} \in \Delta_{n+1}(\xi_n): \pi_{\xi_n}^{-1}[E(\xi_{n+1})]\setminus \bigcup \gamma_{n+1}(\xi_n) \neq \varnothing\}.$$

则 $\theta_{n+1}^*(\xi_n) \subset \theta_{n+1}(\xi_n)$.

$\forall \xi_{n+1} \in \theta_{n+1}(\xi_n)$，任取 $x(\xi_{n+1}) \in E(\xi_{n+1}) \cap \overline{\pi_{\xi_n}[A]} \cap \overline{\pi_{\xi_n}[B]}$. 因 $t(X_{\xi_n}) = \omega$，存在可数子集 $A(\xi_{n+1}) \subset A$ 及 $B(\xi_{n+1}) \subset B$，使得

$$x(\xi_{n+1}) \in \overline{\pi_{\xi_n}[A(\xi_{n+1})]} \cap \overline{\pi_{\xi_n}[B(\xi_{n+1})]}.$$

令

$$R(\xi_{n+1}) = R(\xi_n) \cup \bigcup \{\operatorname{supp}(a) \cup \operatorname{supp}(c):$$
$$a \in A(\xi_{n+1}), c \in B(\xi_{n+1})\},$$
$$\Delta_{n+1} = \bigcup \{\Delta_{n+1}(\xi_n): \xi_n \in \theta_n\},$$
$$\theta_{n+1} = \bigcup \{\theta_{n+1}(\xi_n): \xi_n \in \theta_n\},$$
$$\theta_{n+1}^* = \bigcup \{\theta_{n+1}^*(\xi_n): \xi_n \in \theta_n\}.$$

由(1)及归纳法假设(d)知，$\{G(\xi_{n+1}): \xi_{n+1} \in \Delta_{n+1}\}$是 X^δ 内的局部有限开集族.

$\forall \xi_n \in \theta_n$，已知 $\gamma_{n+1}(\xi_n)$是局部有限开集族且$\bigcup \gamma_{n+1}(\xi_n) \subset G(\xi_n)$. 则

$$\gamma_{n+1} = \bigcup \{\gamma_{n+1}(\xi_n): \xi_n \in \theta_n\}$$

是局部有限开集族，使得

$$\forall U \in \gamma_{n+1}, \overline{U} \cap A = \varnothing \text{ 或 } \overline{U} \cap B = \varnothing.$$

$\forall\xi_{n+1}\in\theta_{n+1}$, $R(\xi_{n+1})\subset S$ 是可数的，X_{ξ_n} 有标准的强 Σ-网络：

$$\langle\varphi(\xi_{n+1},m)=\{F(s_{n+2}):s_{n+2}\in{}^{\overline{m}}\Omega(\xi_{n+1})\}\rangle_{m=1}^{\infty}.$$

至此，归纳法完成. 论断1真.

令 $\gamma=\bigcup\limits_{n\in N}\gamma_n$，它是 X^b 内的 σ-局部有限开集族，使得

$$\forall U\in\gamma, \overline{U}\cap A=\varnothing \text{ 或 } \overline{U}\cap B=\varnothing.$$

为了证明 X^b 是正规的，据3.1.3，只需再证

$$A\cup B\subset\bigcup\gamma. \tag{2}$$

反证. 若 $\exists y\in(A\cup B)\setminus\bigcup\gamma$，下面来导出矛盾. 为此先证

论断2　存在二重序列 $(\beta_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$，使得 $\forall n\in N$, $\eta_n=(\beta_{ij})_n\in\theta_n$ 且存在 $t_{n+1}\in{}^N\Omega(\eta_n)$，使得 $\langle F(t_{n+1}|\overline{m})\rangle_{m=1}^{\infty}$ 是 X_{η_n} 内点 $\pi_{\eta_n}(y)$ 处的局部强 Σ-网络，使得 $\forall i,j\leqslant n$, $\beta_{ij}=t_i(j)$.

证　令 $\eta_0=\varnothing\in\theta_0$. X_{η_0} 有标准强 Σ-网络

$$\langle\varphi(\eta_0,m)=\{F(s_1):s_1\in{}^{\overline{m}}\Omega(\eta_0)\}\rangle_{m=1}^{\infty}.$$

对于点 $\pi_{\eta_0}(y)\in X_{\eta_0}$，$\exists t_1\in{}^N\Omega(\eta_0)$，使得集列 $\langle F(t_1|\overline{m})\rangle_{m=1}^{\infty}$ 是 $\pi_{\eta_0}(y)$ 处的局部强 Σ-网络. 令 $\beta_{11}=t_1(1)$. 则 $\eta_1=(\beta_{11})\in\Delta_1$. 因 $\pi_{\eta_0}(y)\in F(t_1(1))=E(\eta_1)$, $y\in\pi_{\eta_0}[E(\eta_1)]\setminus\bigcup\gamma_1\neq\varnothing$，于是 $\eta_1\in\theta_1^*\subset\theta_1$.

现设 $n<\omega$ 且设 $\forall k\leqslant n$，已构成 $\eta_k=(\beta_{ij})_k\in\theta_k$, $\beta_{ij}=t_i(j)$ 且 $\exists t_{k+1}\in{}^N\Omega(\eta_k)$，使得集列 $\langle F(t_{k+1}|\overline{m})\rangle_{m=0}^{\infty}$ 是点 $\pi_{\eta_k}(y)$ 处的局部强 Σ-网络. 令 $\eta_{n+1}=(\beta_{ij})_{n+1}$，使得 $\eta_{n+1}|n=\eta_n$；当 $1\leqslant i\leqslant n$ 时，$\beta_{i,n+1}=t_i(n+1)$；当 $1\leqslant j\leqslant n+1$ 时，$\beta_{n+1,j}=t_{n+1}(j)$. 则 $\eta_{n+1}\in\Delta_{n+1}$. 对于 $0\leqslant k\leqslant n$，有

$$p_{\eta_k}^{\eta_n}\circ\pi_{\eta_n}(y)=\pi_{\eta_k}(y)\in F(t_{k+1}(1),\cdots,t_{k+1}(n+1)),$$

则

$$y\in\pi_{\eta_n}^{-1}[E(\eta_{n+1})]\setminus\bigcup\gamma_{n+1}\neq\varnothing,$$

$$\eta_{n+1}\in\theta_{n+1}^*\subset\theta_{n+1}.$$

$X_{\eta_{n+1}}$ 有标准的强 Σ-网络. $\exists t_{n+2}\in{}^N\Omega(\eta_{n+1})$，使得 $\langle F(t_{n+2}|\overline{m})\rangle_{m=1}^{\infty}$ 是

点 $\pi_{\eta_{n+1}}(y)$ 处的局部强 Σ-网络. 由归纳法知,论断2真.

$\forall n<\omega$,固定之. $\forall m>n$,令

$$L_{nm}=\{p^{\eta_i}_{\eta_n}(x(\eta_{i+1})): i\geqslant m\}.$$

则 $L_{n,m+1}\subset L_{nm}\subset X_{\eta_n}$. 由(c)及(g)知,

$$\overline{L}_{nm}\subset F(\beta_{n+1,1},\cdots,\beta_{n+1,m}),$$

其中 $\beta_{n+1,j}=\beta_{(n+1)j}=t_{n+1}(j)$. $\langle\overline{L}_{nm}\rangle_{m>n}$ 是强 Σ-空间 X_{η_n} 内不空闭集组成的下降序列. 由3.4.5中的注知,$K_n=\bigcap\limits_{m>n}\overline{L}_{nm}$ 是 X_{η_n} 的不空紧子集. 易见,$\forall n\in N$,$p^{\eta_n}_{\eta_{n-1}}[K_n]\subset K_{n-1}$. $S=\langle K_n,p^{\eta_{n+1}}_{\eta_n}\rangle_{n<\omega}$ 是不空紧子集组成的逆向序列. 据3.4.22,存在 $t\in\varprojlim S$. 令 $R=\bigcup\limits_{n<\omega}R(\eta_n)$. 定义 $u\in X_t$ 如下:

$$\forall\alpha\in R\ \exists n<\omega,\alpha\in R(\eta_n),\text{定义 } u_\alpha=t_n(\alpha). \tag{3}$$

若 $m<n$ 也使得 $\alpha\in R(\eta_m)$,则 $t_m=p^{\eta_n}_{\eta_m}(t_n)=t_n|R(\eta_m)$. 于是 $t_m(\alpha)=t_n(\alpha)$,即(3)式确定的 u_α 与 $n<\omega$ 的选取无关. 又定义 $z\in X^b$ 如下:

$$\pi_R(z)=u,\pi_{(S\setminus R)}(z)=\pi_{(S\setminus R)}(b).$$

下面我们再证明

$$z\in A\cap B. \tag{4}$$

设 U 是 X^b 的基本开集使得 $z\in U$. 设 $U'=p_D^{-1}[U_D]$ 是 $\prod\limits_{\sigma\in S}X_\sigma$ 的基本开集,使得 $U=X^b\cap U'$. 此处 $p_D^{-1}:\prod\limits_{\sigma\in S}X_\sigma\to X_D$ 是投射,$\varnothing\neq D\subset S$,$D$ 有限,$U_D=\prod\limits_{\sigma\in D}U_\sigma$,每个 U_σ 开于 X_σ.

情形 1　若 $E=D\cap R\neq\varnothing$,则 $\exists k<\omega$,使得 $E\subset R(\eta_k)$.

$$\pi_{\eta_k}(z)=\pi_{\eta_k}(u)=t_k\in K_k\subset\overline{L}_{k,k+1}.$$

又 $\pi_{\eta_k}(z)\in\pi_{\eta_k}[U]$,则 $\exists i\geqslant k+1$,使得

$$p^{\eta_i}_{\eta_k}(x(\eta_{i+1}))\in\pi_{\eta_k}[U].$$

于是有

$$x(\eta_{i+1})\in(p^{\eta_i}_{\eta_k})^{-1}\circ\pi_{\eta_k}[U]=\pi_{\eta_i}[U],$$

且 $$x(\eta_{i+1})\in\overline{\pi_{\eta_i}[A(\eta_{i+1})]}.$$

则$\exists a\in A(\eta_{i+1})$，使得 $\pi_{\eta_i}(a)\in\pi_{\eta_i}[U]$.

$U=\pi_{\eta_i}[U]\times X_{(R\setminus R(\eta_i))}\times(p_{(S\setminus R)}[U']\cap\pi_{(S\setminus R)}[X^b])$. 因 $a\in A(\eta_{i+1})$，$\mathrm{supp}(a)\subset R(\eta_{i+1})\subset R$. 则

$$\pi_{(S\setminus R)}(a)=\pi_{(S\setminus R)}(b)\in\pi_{(S\setminus R)}[X^b].$$

其次，由 $z\in U'$ 知，

$$\pi_{(S\setminus R)}(a)=\pi_{(S\setminus R)}(b)=\pi_{(S\setminus R)}(z)\in p_{(S\setminus R)}[U'].$$

结果 $a\in U$. 又 $a\in A(\eta_{i+1})\subset A$，$U\cap A\neq\varnothing$.

情形Ⅱ　若 $E\cap R=\varnothing$. 因 $\pi_{\eta_1}(z)\in\pi_{\eta_1}(U)$且 $\pi_{\eta_1}(z)\in\overline{L}_{1z}$，则$\exists i\geqslant 2$，$p^{\eta_i}_{\eta_1}(x(\eta_{i+1}))\in\pi_{\eta_1}[U]$. 因 $x(\eta_{i+1})\in\overline{\pi_{\eta_i}[A(\eta_{i+1})]}$，$\exists a\in A(\eta_{i+1})$，$\pi_{\eta_i}(a)\in X_{\eta_i}$.

$$U=X_{\eta_i}\times X_{(R\setminus R(\eta_i))}\times(p_{(S\setminus R)}[U']\cap\pi_{(S\setminus R)}[X^b]).$$

因 $\mathrm{supp}(a)\subset R$，$\pi_{(S\setminus R)}(a)=\pi_{(S\setminus R)}(b)=\pi_{(S\setminus R)}(z)\in p_{(S\setminus R)}[U']\cap\pi_{(S\setminus R)}[X^b]$. 故 $a\in U\cap A$. 结果，$z\in\overline{A}=A$. 同理可证 $z\in\overline{B}=B$. (4)真. 这与 $A\cap B=\varnothing$矛盾，故(2)真. 定理得证.

3.4.25　系(Gul′ko[1977]，Rudin[1977])　度量空间的 Σ-积是正规的.

3.4.26　系(Corson[1959])　完备度量空间的 Σ-积是正规的. 证毕.

【习题】

3.A　试证：(Ⅰ)　空间 X 是完全正规的当且仅当对 X 的每个开子集 G，X 内有一列开集$\langle W_n\rangle_{n=0}^{\infty}$，使得 $G=\bigcup_{n=0}^{\infty}W_n=\bigcup_{n=0}^{\infty}\overline{W}_n$.

(Ⅱ)　完全正规空间的子空间是完全正规的.

3.B　试证：（Ⅰ）　无限的 T_2空间内存在可数无限的互不相交开集族.

（Ⅱ）　若(X,τ)是完全正规的无限 T_2可分空间，则$|\tau|=2^\omega$.

3.C　试证：积空间 I^{ω_1}不是完全正规的.

3.D　空间 X 是 ω_1-**紧空间**，如果它的每个不可数子集有一个聚点. 试证：一个 T_1空间是 ω_1-紧空间当且仅当它具有性质(δ).

3.E　(Kramer[1973],Chaber[1979])　试证：空间 X 是次正规的当且仅当对于 X 内任意不相交的闭集 A,B,X 内有不相交的 G_δ-集 S,T，使得 $A\subset S,B\subset T$. 结果，正规空间是次正规的.

3.F　(Junnila[1980])（Ⅰ）　设 P 表无理数集且 $T\subset P$，则 P 有子集列$\langle S_n\rangle_{n=0}^\infty$，使得$\forall x,y\in T$，若 $x\neq y$，则$\exists m<\omega$ 使得 $x\in S_m$ 且 $y\notin S_m$.

（Ⅱ）　设 X 是次正规空间且 $\varphi=\{F_s:s\in S\}$是 X 内的离散闭集族使得$|S|\leqslant 2^\omega$，则存在 X 内的 G_δ-集组成的互不相交族$\{K_s:s\in S\}$使得$\forall s\in S,F_s\subset K_s$.

3.G　试证：若 X 是 κ-集体正规空间且 $f:X\to Y$ 是闭的满映射，则 Y 是 κ-集体正规的.

3.H　试证：若 $\varphi=\{F_s:s\in S\}$是空间 X 内的离散闭集族且 η 是 X 的一个正规开覆盖，使得 η 的每个元至多与 φ 的一个元相交. 则 X 有互不相交开集族$\{U_s:s\in S\}$，使得$\forall s\in S,F_s\subset U_s$.

3.I　定义：（Ⅰ）(Heath[1964])　设 ξ,η 是空间 X 的开覆盖. η 是 ξ 的 σ-**点星形加细**，如果 $\eta=\bigcup_{n=0}^{\infty}\eta_n$，使得$\forall n<\omega$，$\{\mathrm{St}(x,\eta_n):x\in X\}$部分加细 ξ. 空间 X 是 σ-**完满正规的**，如果它的每个开覆盖有开的 σ-点星形加细.

（Ⅱ）(刘[1977])　空间 X 是 σ-**集体正规的**，如果对 X 内每个离散闭集族$\{F_s:s\in S\}$，X 内有一列开集族$\langle\xi_n\rangle$，使得每个 $\xi_n=\{U_{ns}:$

$s\in S\}$是互不相交的且$\forall s\in S, F_s\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}U_{ns}$.

试证：可遮空间是σ-完满正规的，σ-完满正规空间是σ-集体正规的.

3.J (Dowker)试证：若$\{F_s:s\in S\}$是正规空间X内的离散闭集族，$\{U_s:s\in S\}$是X内的互不相交开集族，使得$\forall s\in S, F_s\subset U_s$. 则$X$内有离散开集族$\{V_s:s\in S\}$，使得$\forall s\in S, F_s\subset V_s\subset\overline{V}_s\subset U_s$.

3.K (刘[1978])试证：σ-集体正规的正规可数仿紧空间是集体正规的.

3.L 试证：ω_1是可膨胀空间但不是ω_1-仿紧的.

3.M 试证：可膨胀空间的子空间不必是可膨胀的.（提示：考虑空间$X=(\omega_1+1)\times(\omega+1)$及其子空间$M=X\setminus\{\langle\omega_1,\omega\rangle\}$.）

3.N 试证：若$f:X\to Y$是完备映射，则X是κ-可膨胀的当且仅当Y是κ-可膨胀的.

3.O 试证：(Ⅰ) (离散)可膨胀空间的闭子空间是(离散)可膨胀的.

(Ⅱ) 若$\{F_s:s\in S\}$是空间X的局部有限闭覆盖，则X是(离散)可膨胀的当且仅当每个F_s是(离散)可膨胀的.

3.P **定义** (钟[1984])：空间X是**σ-可膨胀(σ-离散可膨胀)的**，如果对X内每个局部有限(离散)闭集族$\{F_s:s\in S\}$，X内有一列开集族$\langle\xi_n\rangle_{n=0}^{\infty}$，使得每个$\xi_n=\{U_{ns}:s\in S\}$是局部有限的且$\forall s\in S, F_s\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}U_{ns}$.

试证：(Ⅰ) 可膨胀空间是σ-可膨胀的，反之不然.

(Ⅱ) 空间X是集体正规的当且仅当它是正规的和σ-离散可膨胀的.

3.Q 试证：空间X是可膨胀的当且仅当它是可数仿紧的和

σ-离散可膨胀的.

3.R　试证:若 $f:X\to Y$ 是完全的满映射,则 X 是 σ-可膨胀的当且仅当 Y 是 σ-可膨胀的.

3.S　试证:σ-可膨胀空间的 F_σ-集是 σ-可膨胀的子空间.

第四章 广义仿紧空间

仿紧空间有多种推广．本节介绍最基本的四种推广，即亚紧、次亚紧、次仿紧和狭义拟仿紧空间．研究这几类空间至少有下面的意义．其一，它们的理论与处理技巧是仿紧空间的理论与技巧的进一步推广与发展．其次，仿紧空间可以分解成所有上述广义仿紧空间的因子．例如，一个空间是仿紧的当且仅当它是可膨胀的和次亚紧的；一个 T_2 空间是仿紧的当且仅当它是集体正规和狭义拟仿紧的等．其三，广义仿紧空间与点集拓扑学重要组成部分之一的广义度量空间有紧密联系，如半分层空间是次仿紧的；严格 p-空间是次亚紧的，等等．由于上述原因，近 15 年来不仅广义仿紧空间理论得到较大的发展，同时也有力地促进了仿紧空间和某些广义度量空间理论的进一步发展．广义仿紧空间理论，或称之为覆盖性质理论是当代点集拓扑学的一个基本的重要组成部分．

§4.1 次仿紧与亚紧空间

从局部有限加细转换到点有限加细，亚紧空间是仿紧空间的

很自然的推广．这两类空间的理论与处理技巧有很多相似或对偶之处．从局部星形加细序列过渡到点星形加细序列，次仿紧空间是完满正规空间，即正则仿紧空间的自然推广．本节介绍这两类广义仿紧空间的概念与基本性质．在本章的后几节中随着理论的发展，还将更深入地揭示这两类空间的特征．

4.1.1　定义　（Ⅰ）设 ξ 及 $\eta_n(n<\omega)$ 是空间 X 的覆盖．$\langle\eta_n\rangle$ 是 ξ 的**点星形加细序列**，如果

$$\forall x\in X\ \exists n<\omega\ \exists U\in\xi\ (\mathrm{St}(x,\eta_n)\subset U).$$

（Ⅱ）设基数 $\kappa\geqslant 2$．空间 X 是 **κ-次仿紧的**，如果 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖有开的点星形加细序列．

（Ⅲ）空间 X 是**次仿紧的**，如果 $\forall\kappa\geqslant 2$，X 是 κ-次仿紧的．

显然完满正规空间是次仿紧的，正则仿紧空间是次仿紧的．其次，若 $\langle\varphi_n\rangle$ 是空间 X 的一个展开，则易知它是 X 的每个开覆盖的开的点星形加细序列，于是可展空间是次仿紧的．

每个开覆盖具有 σ-离散闭加细的空间首先为 McAuley[1958] 所研究，该文称之为 **F_σ-可遮空间**．每个开覆盖有开的点星形加细序列的空间是 Arhangel'skii[1966] 中提出的，称之为 **σ-仿紧空间**．Burke[1969] 证明了上述两类空间相同并重新命名为**次仿紧空间**．

4.1.2　例　切 V 拓扑（Heath[1964]）存在 T_1 正则可展空间 X 但非正规，于是 X 是次仿紧但非仿紧的．

证　让 $X=\{\langle x,y\rangle\in R^2: y\geqslant 0\}$ 表上半平面．$\forall\langle p,q\rangle\in X$，

若 $q>0$，令 $\eta(p,q)=\{\{\langle p,q\rangle\}\}$，

若 $q=0$，令 $\eta(p,q)=\{U_n(p,0): n\in N\}$，

其中，$U_n(p,0)=\{\langle x,y\rangle\in R^2: (x+y=p\vee x-y=p)\wedge 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{n}\}$．在 X 上赋予以 $\eta(p,q)$ 为点 $\langle p,q\rangle$ 的邻域基所生成的拓扑，叫**切 V 拓扑**．显然，X 是 T_1 的．因为每个 $U_n(p,0)$ 是闭集，X 是正则的．

下证 X 是可展的：

$\forall n\in N$，令

$$\varphi_n = \{U_n(p,0) : p\in R\}\cup\{\{(x,y)\} : x\in R, y>0\}.$$

则易知 (φ_n) 是 X 的一个展开.

再证 X 不正规：

让 Q 表有理数集，令

$$A=\{(r,0) : r\in Q\},\quad B=\{(x,0) : x\in R\setminus Q\}.$$

则 A,B 是 X 内不相交闭集. 用范畴方法易知 A 与 B 不能邻域分离（参见蒲保明等[1985]例 6.2.14）. 证毕

4.1.3 引理 若空间 X 的开覆盖 ξ 有 σ-离散闭加细，则 ξ 有开的点星形加细序列.

证 设 $\xi=\{U_s : s\in S\}$ 是空间 X 的开复盖且 ξ 有一个加细 $\varphi=\bigcup_{n=0}^{\infty}\varphi_n$，每个 φ_n 是离散闭集族．不妨设 $\varphi_n=\{F_{ns} : s\in S\}$ 且 $F_{ns}\subset U_s$. $\forall n<\omega, s\in S$，令

$$V_{ns}=U_s\setminus\bigcup\{F_{nt} : t\in S\setminus\{s\}\}.$$

$$\eta_n=\{V_{ns} : s\in S\}\cup\{X\setminus\bigcup_{s\in S}F_{ns}\}.$$

易知 (η_n) 是 ξ 的开的点星形加细序列. 证毕

4.1.4 定理 空间 X 是次仿紧的当且仅当 X 的每个开覆盖有 σ-离散闭加细.

证 $(\leftarrow)$由 4.1.3 知．

$(\rightarrow)$设 $\xi=\{U_\alpha : \alpha<\kappa\}$ 是次仿紧空间 X 的开覆盖，则 ξ 有开的点星形加细序列 $(\eta(i_0))_{i_0<\omega}$. $\forall i_0<\omega$，X 的开覆盖 $\eta(i_0)$ 有开的点星形加细序列 $(\eta(i_0,i_1))_{i_1<\omega}$. 如此继续. 由归纳法知，$\forall n\in N\forall s=(i_0,\cdots,i_{n-1})$，$X$ 的开覆盖 $\eta(s)$ 有开的点星形加细序列 $(\eta(s\hat{+}i_n))_{i_n<\omega}$. 令 $\eta(\varnothing)=\eta(0)$. $\forall s\in\omega^{<\omega}, \alpha<\kappa$，令

$$F(s,\alpha)=\{x\in X: \mathrm{St}(x,\eta(s))\subset U_\alpha\}.$$

则易知闭集 $F(s,\alpha)\subset U_\alpha$，且 $\{F(s,\alpha): s\in\omega^{<\omega},\alpha<\kappa\}$ 覆盖 X.

$\forall s,t\in\omega^{<\omega},\alpha<\kappa$，令

$$G(s,t,\alpha)=F(s,\alpha)\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{St}(F(s,\beta),\eta(t)).$$

由 2.2.30 知，$\varphi_{st}=\{G(s,t,\alpha): \alpha<\kappa\}$ 是 X 内的离散闭集族. 于是 $\varphi=\bigcup\{\varphi_{st}: s,t\in\omega^{<\omega}\}$ 是 ξ 的 σ-离散闭的部分加细. 只需再证

$$\bigcup\varphi=X. \tag{1}$$

设 $x\in X$.

令

$A(x)=\{\alpha<\kappa: \exists s\in\omega^{<\omega},x\in F(s,\alpha)\}$，$\alpha(x)=\min A(x)$.

则 $\exists s(x)\in\omega^{<\omega}$，$x\in F(s(x),\alpha(x))$. 设 $s(x)\in\omega^n$. 因 $(\eta(s(x)+i_n))_{i_n<\omega}$ 是 $\eta(s(x))$ 的点星形加细序列，$\exists i_n<\omega\ \exists V\in\eta(s(x))$，使得

$$\mathrm{St}(x,\eta(s(x)+i_n))\subset V.$$

则 $\forall\beta<\alpha(x)$，$\mathrm{St}(x,\eta(s(x)+i_n))\cap F(s(x),\beta)=\varnothing$. 于是 $\forall\beta<\alpha(x)$，$x\notin\mathrm{St}(F(s(x),\beta),\eta(s(x)+i_n))$.

$$\begin{aligned}x&\in F(s(x),\alpha(x))\setminus\bigcup_{\beta<\alpha(x)}\mathrm{St}(F(s(x),\beta),\eta(s(x)+in))\\&=G(s(x),s(x)+i_n,\alpha(x))\in\varphi.\end{aligned}$$

(1)真. 证毕.

4.1.5　系　(Burke[1970])空间 X 是次仿紧的当且仅当 X 的每个开覆盖有一列开加细 (η_n)，使得 $\forall x\in X\ \exists n(x)<\omega$，$|(\eta_n(x))_x|=1$.

证　(→)设 $\xi=\{U_s: s\in S\}$ 是次仿紧空间 X 的开覆盖，则 ξ 有一个加细 $\varphi=\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，每个 $\varphi_n=\{F_{ns}: s\in S\}$ 是离散闭集族且 $F_{ns}\subset U_s$.

$\forall x\in X\ \exists s(x)\in S$，$x\in U_{s(x)}$. $\forall n<\omega$，$x\in X$，令

$$V_n(x)=\begin{cases}U_{s(x)}\setminus\bigcup\varphi_n, & \text{当 } x\notin\bigcup\varphi_n,\\ U_{t(x)}\setminus\bigcup\{F_{ns}: s\neq t(x)\}, & \text{当 }\exists!\,t(x)\in S, x\in F_{nt(x)}.\end{cases}$$

则 $V_n(x)\in N(x)$. $\eta_n=\{V_n(x): x\in X\}$是$\xi$的开加细. $\forall x\in X\ \exists n<\omega$ $\exists!\ t(x)\in S, x\in F_{nt(x)}$,则 $x\in V_n(x)=U_{t(x)}\setminus\bigcup\{F_{ns}: s\neq t(x)\}$,并且易知$|(\eta_n)_x|=1$.

($\leftarrow$)设ξ是X的开覆盖. 由假设ξ有一列开加细$\langle\eta_n\rangle$,使得$\forall x\in X\ \exists n(x)<\omega$, $|(\eta_{n(x)})_x|=1$. 则$\langle\eta_n\rangle$是ξ的开的点星形加细序列,从而X是次仿紧的,证毕.

4.1.6 系 设空间X有一个可数闭覆盖$\{F_i: i<\omega\}$,使得每个F_i是X的次仿紧子空间,则X是次仿紧的.

4.1.7 定理 对任意空间X,下列各条等价:

(Ⅰ) X是次仿紧的;

(Ⅱ) X的每个开覆盖有σ-局部有限闭加细;

(Ⅲ) X的每个开覆盖有σ-闭包保持闭加细.

证 (Ⅰ)→(Ⅱ)由4.1.4知.

(Ⅱ)→(Ⅲ)显然,

(Ⅲ)→(Ⅰ)设$\xi=\{U_\alpha: \alpha<\tau\}$是$X$的开覆盖,其中$\alpha,\tau$是序数. 用与2.2.36相同的方法可证下列二论断:

论断1 (a) $\forall n<\omega\ \forall s\in\omega^n$,$X$有开覆盖$\eta(s)$且$\eta(s)$有加细$\bigcup_{i_n<\omega}\varphi(s+i_n)$,使得每个$\varphi(s+i_n)$是闭包保持闭集族.

(b) $\eta(\varnothing)=\xi$且$\forall s\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega^n$, $\eta(s)=\{U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}F(s,\beta): \alpha<\tau\}$,其中$F(s,\beta)=\bigcup\{F\in\varphi(s): F\subset U_\beta\}$.

$\forall s,t\in\omega^{<\omega}$, $\alpha<\tau$,令

$$C(s,t,\alpha)=\bigcup\{F\in\varphi(s): F\subset U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}F(t,\beta)\}.$$

论断2 $\forall s,t\in\omega^{<\omega}$, $\delta_\alpha=\{F(s,\alpha)\cap C(t,s,\alpha): \alpha<\tau\}$是$X$内的离

散闭集族.

因 $F(s,\alpha)\cap C(t,s,\alpha)\subset F(s,\alpha)\subset U_\alpha$，于是 $\delta=\bigcup\{\delta_{st}: s,t\in\omega^{<\omega}\}$是 ξ 的 σ-离散闭的部分加细. 为证 X 是次仿紧的，据 4.1.4，只需再证明

$$\bigcup\delta = X. \tag{1}$$

设 $x\in X$. 令 $A(x)=\{\alpha<\tau: \exists s\in\omega^{<\omega}\exists F\in\varphi(s), x\in F\subset U_\alpha\}$. 则 $A(x)\neq\varnothing$，令 $\alpha(x)=\min A(x)$. 则$\exists s(x)\in\omega^{<\omega}\exists F_0\in\varphi(s(x))$，使得 $x\in F_0\subset U_{\alpha(x)}$，$x\in F_0\subset F(s(x),\alpha(x))$. 设 $s(x)\in\omega^n$，$x\in X=\bigcup(\bigcup_{i<\omega}\varphi(s(x)+i))$. 故$\exists i_*<\omega\exists F_1\in\varphi(s(x)+i_*)$，使得 $x\in F_1$. 又$\exists V\in\eta(s(x))$，使得 $F_1\subset V$. 设

$$V=U_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}F(s(x),\beta).$$

则 $\alpha=\alpha(x)$. 于是 $x\in F_1\subset V=U_{\alpha(x)}\setminus\bigcup_{\beta<\alpha(x)}F(s(x),\beta)$，从而

$$x\in F(s(x),\alpha(x))\cap C(s(x)+i_*,s(x),\alpha(x))\in\delta_{s(x)\alpha(x)+i_*}.$$

$x\in\bigcup\delta$. (1)真. 证毕.

4.1.8 系 设 X 是次仿紧空间且 $f: X\to Y$ 是闭的满映射，则 Y 是次仿紧空间.

证 设 ξ 是 Y 的开覆盖. 则$\{f^{-1}[U]: U\in\xi\}$是 X 的开覆盖，从而它有一个 σ-闭包保持闭加细 φ. $\{f(F): F\in\varphi\}$即为 ξ 的 σ-闭包保持闭加细. 据 4.1.7，Y 是次仿紧的，证毕.

4.1.9 定理 设 X 是正则空间，Y 是次仿紧空间且 $f: X\to Y$ 是完备满映射，则 X 是次仿紧空间.

证 设 ξ 是 X 的开覆盖. 因 X 是正则的，X 有开覆盖 η，使得$\{\overline{V}: V\in\eta\}$加细 ξ. $\forall y\in Y$，存在有限子族 $\eta(y)\subset\eta$，使得 $f^{-1}[y]\subset\bigcup\eta(y)$. 则$\exists G(y)\in N(y)$，$f^{-1}[G(y)]\subset\bigcup\eta(y)$. $\{G(y): y\in Y\}$是 Y 的开覆盖，从而它有一个加细$\bigcup_{n<\omega}\zeta_n$，每个 ζ_n 是离散闭集族. $\forall n<\omega$ $\forall P$

$\in \zeta_n, \exists y(n,P) \in Y$，使得 $P \subset G(y(n,P))$，从而

$$f^{-1}[P] \subset \bigcup \eta(y(n,P)).$$

令 $\varphi_n = \{f^{-1}[P] \cap V : P \in \zeta_n, V \in \eta(y(n,P))\}$. 则 φ_n 是局部有限的. $\bigcup_{n<\omega} \varphi_n$ 覆盖 X. 令 $\varphi'_n = \{\overline{F} : F \in \varphi_n\}$. 则 $\bigcup_{n<\omega} \varphi'_n$ 是 ξ 的 σ-局部有限闭加细，X 是次仿紧的. 证毕.

下面我们转入介绍亚紧空间.

4.1.10　定义　(Ⅰ)　设基数 $\kappa \geqslant \omega$. 空间 X 是 **κ-亚紧的**，如果 X 的每个势 $\leqslant \kappa$ 的开覆盖有一个点有限的开加细.

(Ⅱ)　空间 X 是**亚紧的(或弱仿紧的)**，如果 $\forall \kappa \geqslant \omega$，$X$ 是 κ-亚紧的.

(Ⅲ)　空间 X 是**可数亚紧的**，如果 X 是 ω-亚紧的.

显然，κ-仿紧空间是 κ-亚紧的.

亚紧空间是 Arens 和 Dugundji[1950]中引入的.

4.1.11　引理　κ-亚紧空间的 F_σ-子空间是 κ-亚紧的.

证　设 A 是 κ-亚紧空间 X 的 F_σ-子空间，且 $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$，每个 A_n 闭于 X. 设 $\xi = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是 A 的开覆盖. $\forall \alpha < \kappa\ \exists V_\alpha$ 开于 X，使得 $U_\alpha = V_\alpha \cap A$. $\forall n < \omega$，$\eta_n = \{V_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{X \setminus A_n\}$ 是 X 的势 $\leqslant \kappa$ 的开覆盖，从而它有一个点有限的开加细 ζ_n，令

$$\varphi_0 = \{H \cap A : H \in \zeta_0 \quad 且\ H \cap A_0 \neq \varnothing\},$$

$$\varphi_n = \{(H \cap A) \setminus \bigcup_{i<n} A_i : H \in \zeta_n \quad 且\ H \cap A_n \neq \varnothing\}.$$

则易知 $\varphi = \bigcup_{n<\omega} \varphi_n$ 是 ξ 的点有限开加细，从而 A 是 κ-亚紧的.

下面两个例子取自 Burke[1984].

4.1.12　例　存在 T_2 局部紧亚紧而非次仿紧的空间.

证　令 $X = \omega_2 \times \omega_2 \setminus \{\langle 0,0 \rangle\}$. $\forall \alpha \in \omega_2 \setminus \{0\}$，令

$$V_\alpha = \{\alpha\} \times \omega_2, W_\alpha = \omega_2 \times \{\alpha\}.$$

$\forall \langle \alpha, \beta \rangle \in X$，令

$$\eta(\alpha,\beta)=\begin{cases}\{(V_\alpha\setminus F)\cup\{\langle\alpha,0\rangle\}:F\in[V_\alpha]^{<\omega}\}, & 当\ \beta=0,\\ \{(W_\beta\setminus F)\cup\{\langle 0,\beta\rangle\}:F\in[W_\beta]^{<\omega}\}, & 当\ \alpha=0,\\ \{\{\langle\alpha,\beta\rangle\}\}, & 当\ \alpha\neq 0\neq\beta.\end{cases}$$

在 X 上赋予以 $\eta(\alpha,\beta)$ 为点 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 的邻域基所生成的拓扑. 显然 X 是 T_2 的. 因每个 V_α 和 W_β 是 X 的紧闭集, X 是局部紧的. 其次, X 的每个开覆盖有一个由 $\bigcup\{\eta(p):p\in X\}$ 的元组成的加细 ξ. 显然, $\forall p\in X$, $|(\xi)_p|\leqslant 3$, 故 X 是亚紧的.

为证 X 不是次仿紧的, 先证下列

论断 1　若 $A,B\subset X$, 使得 $\forall\alpha<\omega_2$, $A\cap V_\alpha$ 与 $B\cap W_\alpha$ 皆可数, 则 $X\neq A\cup B$.

证　反证. 若 $X=A\cup B$. 令

$$\beta_0=\sup\{\beta<\omega_2:\langle\alpha,\beta\rangle\in A\cap V_\alpha,\alpha<\omega_1\}.$$

因 $A\cap V_\alpha$ 可数, $\beta_0<\omega_2$. 令 $C=\omega_1\times(\omega_2\setminus(\beta_0+1))$, 则 $C\cap A=\varnothing$ 从而 $C\subset B$. 取 β 合于 $\beta_0<\beta<\omega_2$, 则 $\omega_1\times\{\beta\}\subset C\cap W_\beta\subset B\cap W_\beta$, 此与 $B\cap W_\beta$ 是可数的假设相矛盾. 论断 1 真.

现证 X 不是次仿紧的, 令

$$\varphi=\{V_\alpha:0<\alpha<\omega_2\}\cup\{W_\alpha:0<\alpha<\omega_2\}.$$

则 φ 是 X 的开覆盖. 反证. 若 X 是次仿紧的, 则 φ 有一个加细 $\zeta=\bigcup_{n<\omega}\zeta_n$, 每个 ζ_n 是离散闭集族. $\forall n<\omega$, 令

$$\xi_n=\{P\in\zeta_n:\exists\alpha(0<\alpha<\omega_2\wedge P\subset V_\alpha)\},$$

$$\eta_n=\{P\in\zeta_n:\exists\alpha(0<\alpha<\omega_2\wedge P\subset W_\alpha)\}.$$

则 $\zeta_n=\xi_n\cup\eta_n$. 令 $A_n=\bigcup\eta_n$, $B_n=\bigcup\xi_n$, 下证

$$\forall n<\omega\forall\alpha<\omega_2\setminus\{0\},A_n\cap V_\alpha\ 与\ B_n\cap W_\alpha\ 皆有限.\tag{1}$$

事实上, 设 $n<\omega$, $0<\alpha<\omega_2$. 因 ζ_n 离散, $\langle\alpha,0\rangle$ 有邻域 $G_\alpha=(V_\alpha\setminus F)\cup\{\langle\alpha,0\rangle\}$ (此处 $F\in[V_\alpha]^{<\omega}$) 至多与 η_n 的一个元相交, 则交点为 $\langle\alpha,\beta\rangle$. 于是 $A_n\cap V_\alpha\subset F\cup\{\langle\alpha,\beta\rangle\}$. 同理知 $B_n\cap W_\alpha$ 有限, (1) 真.

令 $A=\bigcup_{n<\omega}A_n$，$B=\bigcup_{n<\omega}B_n$. 由(1)及论断 1 知，$X\neq A\bigcup B=\bigcup_{n<\omega}(\bigcup\zeta_n)=\bigcup\zeta$. 矛盾，证毕.

4.1.13 例 存在 T_2 局部紧、亚紧、次仿紧的非仿紧空间 Y.

证 让 $X=\omega_2\times\omega_2\backslash\{(0,0)\}$表 4.1.12 例中的空间．$Y=X\bigcap(\omega_2\times\omega)$作为 X 的子空间，是 X 的闭子空间. 于是 Y 是 T_2 局部紧且亚紧的．其次，令 $A=(\omega_2\backslash\{0\})\times\{0\}$. 则

$$Y=A\bigcup\bigcup\{W_\alpha:0<\alpha<\omega\}.$$

每个 W_α 如例 4.1.12 是 T_2 紧的闭子空间从而是次仿紧的．A 是离散闭子空间也是次仿紧的. Y 是可数多个次仿紧闭子空间的并，从而本身是次仿紧的. 最后，为了证明 Y 不仿紧，我们来证它不正规．令$B=\{0\}\times(\omega\backslash\{0\})$. 则 A 与 B 是 Y 内的不相交闭集．易知，它们在 Y 内不能邻域分离，故 Y 不正规．证毕.

4.1.14 定理 空间 X 是 κ-亚紧的当且仅当 X 的每个势$\leqslant\kappa$的良序开覆盖有点有限的开加细.

证 只需证充分性．对每个基数 $\lambda\leqslant\kappa$，让 $P(\lambda)$表命题："若 ξ 是 X 的势$\leqslant\lambda$ 的开覆盖，则 ξ 有点有限开加细". 下面用超限归纳法证明$\forall\lambda\leqslant\kappa$，$P(\lambda)$真．则 $P(\kappa)$真，即 X 是 κ-亚紧的.

当 λ 有限时，$P(\lambda)$显然真．现设 $\lambda\leqslant\kappa$ 是任一无限基数，使得对任意基数 $\mu<\lambda$，$P(\mu)$真．现证 $P(\lambda)$真，设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\lambda\}$是 X 的势$\leqslant\lambda$ 的开覆盖. $\forall\alpha<\lambda$，令 $V_\alpha=\bigcup_{\beta\leqslant\alpha}U_\beta$. 则开集族$\{V_\alpha:\alpha<\lambda\}$是 X 的势$\leqslant\kappa$ 的良序开覆盖．由定理的假设，它有点有限的精确开加细 $\zeta=\{W_\alpha:\alpha<\lambda\}$，则 $W_\alpha\subset\bigcup_{\beta\leqslant\alpha}U_\beta$. $\forall\alpha<\lambda$，$\eta_\alpha=\{\bigcup_{\beta>\alpha}W_\beta\}\bigcup\{U_\beta:\beta\leqslant\alpha\}$是 X 的开覆盖且$|\eta_\alpha|<\lambda$. 由归纳法假设，η_α 有点有限的开加细 δ_α. 令

$$\varphi=\{W_\alpha\bigcap Q:Q\in\delta_\alpha\wedge\exists\beta\leqslant\alpha(Q\subset U_\beta),\alpha<\lambda\}.$$

若能证明 φ 是 ξ 的点有限开加细，则 $P(\lambda)$真，归纳法即告完成，现

来证明 φ 是 ξ 的点有限开加细：

$\forall x\in X$，设 $(\zeta)_x=\{W_{\alpha_0},\cdots,W_{\alpha_n}\}$，并令 $\alpha_r=\max\{\alpha_0,\cdots,\alpha_n\}$. 则 $x\notin\bigcup_{\beta>\alpha_r}W_\beta$. 另方面，$\exists Q\in\delta_{\alpha_r}$，$x\in Q$. 则 $Q\not\subset\bigcup_{\beta>\alpha_r}W_\beta$，从而 $\exists\beta\leqslant\alpha_r$，$Q\subset U_\beta$. 于是 $x\in W_{\alpha_r}\cap Q\in\varphi$，$\varphi$ 是 ξ 的开加细，其次，有

$$(\varphi)_x\subset\{W_{\alpha_i}\cap Q:Q\in(\delta_{\alpha_i})_x,i=0,\cdots,n\}.$$

故 φ 是点有限的 . $P(\lambda)$真 . 证毕.

4.1.15　系(Sconyer)[1970]　空间 X 是亚紧的当且仅当 X 的每个良序开覆盖有点有限的开加细.

4.1.16　定理　空间 X 是 κ-仿紧的当且仅当 X 是 κ-可膨胀的和 κ-亚紧的.

证($\rightarrow$)由 3.3.2 知.

($\leftarrow$)设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 κ-可膨胀和 κ-亚紧空间 X 的开覆盖，则 ξ 有一个点有限的精确开加细 $\eta=\{V_\alpha:\alpha<\kappa\}$. 先证

论断 1　$\forall k<\omega$，X 有开集族 φ_k 满足下列条件：

(a)　φ_k 部分加细 ξ；

(b)　φ_k 是局部有限的；

(c)　$\forall n\in N$，$\{x\in X:|(\eta)_x|\leqslant n\}\subset\bigcup_{k=0}^{n}(\bigcup\varphi_k)$；

(d)　$\forall x\in\bigcup\varphi_k$，$|(\eta)_x|\geqslant k$.

证　$k=0$ 时，令 $\varphi_0=\varnothing$. 现设 $n\geqslant 0$ 且设已构成 $\varphi_0,\cdots,\varphi_n$ 满足条件(a)—(d)，下面来构造 φ_{n+1}. $\forall s\in[k]^{n+1}$，令

$$F_s=X\setminus[(\bigcup_{k=0}^{n}(\bigcup\varphi_k))\cup\bigcup_{\alpha\notin s}V_\alpha].$$

则有

$$\forall s\in[\kappa]^{n+1},F_s\subset\bigcap_{\alpha\in s}V_\alpha.\tag{1}$$

事实上，设 $s\in[k]^{n+1}$ 且 $x\in F_s$，则 $x\notin\bigcup_{k=0}^{n}(\bigcup\varphi_k)$. 据($c$)，$|(\eta)_x|\geqslant n+1$，$(\eta)_x$ 内有 $n+1$ 个不同的元 $V_{\alpha_0},\cdots,V_{\alpha_n}$，令 $s_0=\{\alpha_0,\cdots,\alpha_n\}$，

则 $s_0\in[\kappa]^{n+1}$ 且 $s=s_0$，从而 $x\in\bigcap_{\alpha\in s_0}V_\alpha=\bigcap_{\alpha\in s}V_\alpha$，(1)真

$$\xi=\{F_s: s\in[\kappa]^{n+1}\}\text{ 是离散闭集族.}\tag{2}$$

考虑下面两种情形：

情形Ⅰ　若 $|(\eta)_x|\geqslant n+1$，则 $(\eta)_x$ 内有两两不同的 $n+1$ 个元 $V_{\alpha_0},\cdots,V_{\alpha_n}$，则

$$G=V_{\alpha_0}\cap\cdots\cap V_{\alpha_n}\in N(x).$$

令 $s_0=\{\alpha_0,\cdots,\alpha_n\}$. $\forall s\in[\kappa]^{n+1}\setminus\{s_0\}$ $\exists\alpha_i\in s_0\setminus s$，从而

$$G\cap F_s\subset V_{\alpha_i}\cap(X\setminus\bigcup_{\alpha\notin s}V_\alpha)=\varnothing.$$

情形Ⅱ　若 $|(\eta)_x|\leqslant n$，由归纳法假设 (c)，x 有邻域 $\bigcup_{k=0}^{n}(\bigcup\varphi_k)$ 与 ξ 的每个元不相交．(2)真．

因 $|[\kappa]^{n+1}|=\kappa$，由(2)及假设知，X 内有局部有限开集族 $\{H_s: s\in[\kappa]^{n+1}\}$，使得 $F_s\subset H_s$. $\forall s\in[\kappa]^{n+1}$，令 $G_s=H_s\cap\bigcap_{\alpha\in s}V_\alpha$，则 $F_s\subset G_s$. $\varphi_{n+1}=\{G_s: s\in[\kappa]^{n+1}\}$ 显然是局部有限开集族且部分加细 ξ. 下证它满足 (c)：

设 $x\in X$ 且 $|(\eta)_x|\leqslant n+1$. 若 $x\notin\bigcup_{k=0}^{n+1}(\bigcup\varphi_k)$，则 $x\notin\bigcup_{k=0}^{n}(\bigcup\varphi_k)$. 由归纳法假设知，$|(\eta)_x|>n$，从而 $|(\eta)_x|=n+1$. $\exists s\in[\kappa]^{n+1}$，使得 $\forall\alpha\notin s$，有 $x\notin V_\alpha$. 则 $x\in F_s\subset G_s\subset\bigcup\varphi_{n+1}\subset\bigcup_{k=0}^{n+1}(\bigcup\varphi_k)$，矛盾．故 $x\in\bigcup_{k=0}^{n+1}(\bigcup\varphi_k)$. (c)真．最后，设 $x\in\bigcup\varphi_{n+1}$. 则 $\exists s\in[\kappa]^{n+1}$，$x\in G_s\subset\bigcap_{\alpha\in s}V_\alpha$，$|(\eta)_x|\geqslant n+1$. (d)真．归纳法完成，论断1真．

由 (a)，(b) 与 (c) 知，$\varphi=\bigcup_{k=0}^{\infty}\varphi_k$ 是 ξ 的 σ-局部有限开加细，又由假设及 3.3.3 知，X 是可数仿紧的．据 2.3.7，X 是 κ-仿紧的．证毕．

4.1.17　定理(Michael[1955]，Nagami[1955])　空间 X 是 T_2 仿紧的当且仅当它是 T_1 集体正规亚紧的．

证(→)显然.

(←)设 X 是 T_1 集体正规亚紧空间且 ξ 是 X 的开覆盖,则它有点有限的精确开加细 η. 先证

论断 1　$\forall k<\omega$, X 有开集族 φ_k 满足下列条件:

(a)　φ_k 部分加细 ξ;

(b)　φ_k 是离散的;

(c)　$\forall n\in N$, $\{x\in X: |(\eta)_x|\leqslant n\}\subset\bigcup_{k=0}^{n}(\bigcup\varphi_k)$;

(d)　$\forall x\in\bigcup\varphi_k$, $|(\eta)_x|\geqslant k$.

证　与 4.1.16 定理证明中的论断 1 的证法相同.

由(a)—(c)知,$\bigcup_{k=0}^{\infty}\varphi_k$ 是 ξ 的 σ-离散开加细. 因 X 是正则的,从而是仿紧的,证毕.

4.1.18　定义　设 $f: X\to Y$ 且 $A\subset X$,则集

$$\operatorname{sat}(f,A)=\bigcup\{f^{-1}[y]: y\in Y, f^{-1}[y]\subset A\}$$

称为 A 关于 f 的**饱和部分**.

4.1.19　引理　(Ⅰ)　设 $f: X\to Y$ 是满的,$A\subset X$. 则

$$f[\operatorname{sat}(f,A)]=\{y\in Y: f^{-1}[y]\subset A\}.$$

(Ⅱ)　设 $f: X\to Y$ 是闭的满映射,则对每个开集 $G\subset X$, $f[\operatorname{sat}(f,G)]$ 开于 Y.

4.1.20　定理　设 X 是正则空间,Y 是亚紧空间且 $f: X\to Y$ 是闭的满映射,使得 $\forall y\in Y$, $f^{-1}[y]$ 是 Lindelöf 的,则 X 是亚紧的.

证　设 ξ 是 X 的开覆盖. 由 X 的正则性知,X 有开覆盖 η,使得 $\{\overline{V}: V\in\eta\}$ 加细 ξ. $\forall y\in Y$, η 有可数子族 $\eta(y)=\{V(y,n): n<\omega\}$,使得 $f^{-1}[y]\subset\bigcup\eta(y)$. $\forall n<\omega\,\exists U(y,n)\in\xi$,使得 $\overline{V(y,n)}\subset U(y,n)$,定义

$$W(y,0)=U(y,0)\cap(\bigcup\eta(y)),$$

$$W(y,n)=(U(y,n)\setminus\bigcup_{i<n}\overline{V(y,i)})\cap(\bigcup\eta(y)),n\geqslant 1.$$

则开集族 $\zeta(y)=\{W(y,n):n<\omega\}$ 覆盖 $y^{-1}[y]$ 且

$$\forall x\in\bigcup\zeta(y),(\zeta(y))_x\text{ 有限}. \tag{1}$$

令 $G(y)=\mathrm{sat}(f,\bigcup\zeta(y))$. 因 $f^{-1}[y]\subset\bigcup\zeta(y)$ 且 $\bigcup\zeta(y)$ 开于 X，则 $y\in f[G(y)]$ 且 $f[G(y)]$ 开于 Y. $\{f[G(y)]:y\in Y\}$ 是 Y 的开覆盖，从而它有一个点有限的开加细 δ. $\forall H\in\delta,\exists y(H)\in Y$，使得 $H\subset f[G(y(H))]$. 令

$$\mu=\{W(y(H),n)\cap f^{-1}[H]:H\in\delta,n<\omega\}.$$

则由(1)知，μ 是 ξ 的点有限开加细 . X 是亚紧空间，证毕.

§4.2 次亚紧空间

次亚紧空间是亚紧空间与次仿紧空间的公共推广，它是在 Worrell 与 Wick[1965]中引入的，当时称之为 **θ-可加细空间** . Junnila [1978]中改称为次亚紧空间. 近年来的研究发现了它的一些新的基本刻画，并由此推出它在闭映射下保持 . 通过对次亚紧空间的研究，又发现了亚紧、次仿紧，特别是仿紧空间的若干新的重要刻画.

4.2.1 定义 （Ⅰ） 设 $\xi,\eta_n(n<\omega)$ 是 X 的覆盖. (η_n) 是 ξ 的 **θ-加细序列**，如果每个 η_n 是 ξ 的加细且 $\forall x\in X$ $\exists n(x)<\omega$，使得 $\eta_{n(x)}$ 在 x 是点有限.

（Ⅱ） 设 $\kappa\geqslant\omega$，空间 X 是 **κ-次亚紧的**，如果 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖都有一个开的 **θ-加细序列**.

（Ⅲ） **空间 X 是次亚紧的**，如果 $\forall\kappa\geqslant\omega$，$X$ 是 κ-次亚紧的. ω-次亚紧空间又称为**可数次亚紧空间**.

显然，κ-亚紧空间是 κ-次亚紧的. 由 4.1.5 知，次仿紧空间是次亚紧的. 另一方面，存在正规的次亚紧空间，它既不是亚紧的也不是次仿紧的，反例见 Burke[1984]例 4.9.

4.2.2　引理　空间 X 是 κ-次亚紧的当且仅当对 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖 ξ，X 有可数闭覆盖 $\{F_n : n<\omega\}$，使得 $\forall n<\omega$，$\xi|F_n$ 在子空间 F_n 内有点有限的开加细.

证　($\rightarrow$)设 ξ 是 κ-次亚紧空间 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖，则 ξ 有一个开的 θ-加细序列 $\langle\eta_n\rangle$. $\forall m,n\in\omega$，令

$$F_{mn}=\{x\in X : |(\eta_m)_x|\leqslant n+1\}.$$

则 $\{F_{mn} : m,n<\omega\}$ 是 X 的可数闭覆盖. $\eta_m|F_{mn}$ 即为 $\xi|F_{mn}$ 在 F_{mn} 内的点有限开加细.

($\leftarrow$)设 ξ 是 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖. 由假设，X 有可数闭覆盖 $\{F_n : n<\omega\}$，使得 $\forall n<\omega$，$\xi|F_n$ 在 F_n 内有点有限的开加细 η_n. $\forall V\in\eta_n$ $\exists V'$ 开于 X，使得 $V=V'\cap F_n$. 又 $\exists U(V)\in\xi$，使得 $V\subset U(V)\cap F_n$. $\forall n<\omega$，令

$$\varphi_n=\{U(V)\cap V' : V\in\eta_n\}\cup\{(X\setminus F_n)\cap U(W)\cap W' : W\in\eta_m, m\in\omega\setminus\{n\}\}.$$

则 φ_n 是 ξ 的开加细. $\forall x\in X$ $\exists n<\omega$，$x\in F_n$. 设 $(\eta_n)_x=\{V_0,\cdots,V_k\}$. 则

$$(\varphi_n)_x\subset\{U(V_i)\cap V_i' : i=0,\cdots,k\}.$$

$\langle\varphi_n\rangle$ 是 ξ 的开的 θ-加细序列，X 是次亚紧空间.

4.2.3　定义　设 $\xi,\eta,\eta_n(n<\omega)$ 是 X 的覆盖.

(Ⅰ)　η 是 ξ 在点 $x\in X$ 处的点星形 F-加细，如果存在有限子族 $\xi'\subset\xi$，使得 $x\in\bigcap\xi'$ 且 $\mathrm{St}(x,\eta)\subset\bigcup\xi'$.

(Ⅱ)　η 是 ξ 的点星形 F-加细，如果 $\forall x\in X$，η 是 ξ 在点 x 处的点星形 F-加细.

(Ⅲ)　$\langle\eta_n\rangle$ 是 ξ 的点星形 F-加细序列，如果 $\forall x\in X$ $\exists n(x)<\omega$，使

得 $\eta_{n(x)}$是 ξ 在 x 处的点星形 $\dot{F}$-加细.

显然,若 $\eta(\langle\eta_n\rangle)$是 ξ 的点有限加细(θ-加细序列)或点星形加细(点星形加细序列),则 $\eta(\langle\eta_n\rangle)$是 ξ 的点星形 $\dot{F}$-加细(点星形 $\dot{F}$-加细序列).

4.2.4　定理(Junnila[1978])　空间 X 是 κ-次亚紧的当且仅当 X 的每个势$\leqslant\kappa$ 的开覆盖有一个半开的点星形 $\dot{F}$-加细序列.

证　($\rightarrow$)显然.

($\leftarrow$)设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$是空间 X 的开覆盖. 先证

论断 1　$\forall s\in\omega^{<\omega}$,$\xi$ 有开加细 $\eta(s)=\{V(s,\alpha):\alpha<\kappa\cdot 2\}$满足下列条件:

(a)　$\forall\alpha<\kappa$,$V(s,\alpha)\subset U_\alpha$,$V(s,\kappa+\alpha)\subset U_\alpha$. 特别地,当 $s=\varnothing\in\omega^0$ 时,$V(\varnothing,\alpha)=\varnothing$.

(b)　$\eta(s)$有半开的点星形 $\dot{F}$-加细序列$\langle\varphi_{s+k}\rangle_{k<\omega}$,使得$\forall\alpha<\kappa$,$k<\omega$,有

$$V(s\dotplus k,\alpha)=U_\alpha\cap[V(s,\alpha)\cup(St(X\setminus\bigcup_{\beta\neq\kappa+\alpha}V(s,\beta),\varphi_{s+k}))^0],\qquad(1)$$

$$V(s\dotplus k,\kappa+\alpha)=U_\alpha\cap(\bigcup_{\beta>\kappa+\alpha}V(s,\beta))\cap(St(X\setminus\bigcup_{\beta<\kappa+\alpha}V(s,\beta),\varphi_{s+k}))^0.\qquad(2)$$

证　对 $n<\omega$ 用归纳法. 当 $n=0$ 时,对 $s=\varnothing\in\omega^0$,$\forall\alpha<\kappa$,令

$$V(\varnothing,\alpha)=\varnothing,V(\varnothing,\kappa+\alpha)=U_\alpha.$$

$$\eta(\varnothing)=\{V(\varnothing,\alpha):\alpha<\kappa\cdot 2\}.$$

现设 $n\in N$ 且设$\forall s\in\bigcup_{j=0}^{n-1}\omega^j$,已构成 ξ 的开加细 $\eta(s)=\{V(s,\alpha):\alpha<\kappa\cdot 2\}$满足(a)和(b). $\forall t\in\omega^n\exists s\in\omega^{n-1}\exists k<\omega$,使得 $t=s\dotplus k$,由假设 $\eta(s)$有半开的点星形 $\dot{F}$-加细序列$\langle\varphi_{s+j}\rangle_{j=0}^{\infty}$.

$\forall\alpha<\kappa$,定义

$$V(t,\alpha)=U_\alpha\cap[V(s,\alpha)\cup(St(X\setminus\bigcup_{\beta\neq\kappa+\alpha}V(s,\beta),\varphi_{s+k}))^0].$$

$$V(t,\kappa+\alpha)=U_\alpha\cap(\bigcup_{\beta>\kappa+\alpha}V(s,\beta))\cap(\mathrm{St}(X\setminus\bigcup_{\beta<\kappa+\alpha}V(s,\beta),$$
$$\varphi_{s+k}))^\circ].$$
$$\eta(t)=\{V(t,\alpha):\alpha<\kappa\cdot 2\}.$$

下证 $\eta(t)$ 是 X 的开覆盖. 设 $x\in X$. 因 $t=s+k$, 由归纳法假设, $\eta(s)$ 是 X 的开覆盖, 令

$$\sigma=\min\{\alpha<\kappa\cdot 2: x\in V(s,\alpha)\}.$$

则 $x\in V(s,\sigma)$. 考虑下面二情形.

情形 I　若 $\sigma<\kappa$. 由归纳法假设 $V(s,\sigma)\subset U_\sigma$. 由(1)知, $x\in V(s,\sigma)\subset V(t,\sigma)\in\eta(t)$.

情形 II　若 $\sigma\geqslant\kappa$. 据 1.2.21, $\exists!\ \rho$ 使得 $\sigma=\kappa+\rho$. 则 $0\leqslant\rho<\kappa$. 下证

$$x\in V(t,\sigma)\cup V(t,\rho).$$

为此, 设 $x\notin V(t,\sigma)$, 我们来证 $x\in V(t,\rho)$. 由 $\sigma=\kappa+\rho$ 的定义知,

$$x\notin\bigcup_{\beta<\kappa+\rho}V(s,\beta). \tag{3}$$

于是有

$$x\in(\mathrm{St}(x,\varphi_t))^\circ\subset(\mathrm{St}(X\setminus\bigcup_{\beta<\kappa+\rho}V(s,\beta),\varphi_{s+k}))^\circ.$$

又由归纳法假设知, $x\in V(s,\sigma)\subset U_\sigma$. 由假设 $x\notin V(t,\sigma)=V(s+k,\kappa+\rho)$. 由(2)知, $x\notin\bigcup_{\beta>\kappa+\rho}V(s,\beta)$. 由(3)知, $x\notin\bigcup_{\beta\neq\kappa+\rho}V(s,\beta)$. 于是有

$$x\in(\mathrm{St}(x,\varphi_t))^\circ\subset(\mathrm{St}(X\setminus\bigcup_{\beta\neq\kappa+\rho}V(s,\beta),\varphi_{s+k}))^\circ$$

由 $x\in U_\sigma$、上式及(1)知, $x\in V(t,\rho)$, 故 $\eta(t)$ 是 X 的开覆盖, 归纳法完成, 论断 1 真. 再证

论断 2　$\langle\eta(s): s\in\omega^{<\omega}\rangle$ 是 ξ 的开的 θ-加细序列, 从而 X 是 κ-次亚紧的.

证　设 $x\in X$. 令 $s(0)=\varnothing$. 则 $\eta(s(0))$ 在 x 处有半开的点星形 $\dot{F}$-加细 $\varphi_{s(0)+k_0}$. 令 $s(1)=s(0)+k_0=\langle k_0\rangle$, 同理 $\eta(s(1))$ 在 X 有半开的点星形 $\dot{F}$-加细 $\varphi_{s(1)+k_1}$, 令 $s(2)=s(1)+k_1=\langle k_0,k_1\rangle$, 如此继

续，由归纳法知，$\forall n<\omega$，$\eta(s(n))$在x处有半开的点星形$\dot{F}$-加细$\varphi_{s(n+1)}$. 此处$s(n+1)=s(n)+k_n=(k_0,\cdots,k_n)$. 由定义，存在有限子集$A_n\subset\kappa\cdot 2$，使得$x\in\bigcap_{\beta\in A_n}V(s(n),\beta)$且

$$\mathrm{St}(x,\varphi_{s(n+1)})\subset\bigcup_{\beta\in A_n}V(s(n),\beta). \tag{4}$$

$\forall n<\omega$，令$\beta_n=\max A_n$，$\delta=\min\{\beta_n: n<\omega\}$. 设$\delta=\beta_m$，$m<\omega$. 下证$\eta(s(m+1))$在$x$是点有限的. 先证

$$x\notin\bigcup\{V(s(m+1),\rho):\rho\geqslant\kappa\wedge\rho>\delta\}. \tag{5}$$

设$\rho\geqslant\kappa$且$\rho>\delta$，则$\rho>\max A_m$. 由(4)知，

$$\mathrm{St}(x,\varphi_{s(m+1)})\subset\bigcup_{\beta\in A_m}V(s(m),\beta)\subset\bigcup_{\beta<\rho}V(s(m),\beta).$$

则

$$St(x,\varphi_{s(m+1)})\cap(X\setminus\bigcup_{\beta<\rho}V(s(m),\beta))=\varnothing.$$

$$x\notin\mathrm{St}(X\setminus\bigcup_{\beta<\rho}V(s(m),\beta),\varphi_{s(m+1)}).$$

另一方面，因$\rho\geqslant\kappa$，$\exists!\,\alpha<\kappa$. 使得$\rho=\kappa+\alpha$，由(2)知，

$$V(s(m+1),\rho)\subset\mathrm{St}(X\setminus\bigcup_{\beta<\kappa+\alpha}V(s(m),\beta),\varphi_{s(m+1)}).$$

故$x\notin V(s(m+1),\rho)$. (5)真. 再证

$$x\notin\bigcup\{V(s(m+1),\rho):\rho\geqslant\kappa\}. \tag{6}$$

设$\rho\geqslant\kappa$. 据(5)，只需证$\kappa>\delta$，反证，若$\kappa\leqslant\delta$，$\forall\rho>\delta$，也有$\rho\geqslant\kappa$. 据(5)，$x\notin\bigcup_{\rho>\delta}V(s(m+1),\rho)$. 其次，$\forall\beta\geqslant\delta$，也有$\beta\geqslant\kappa$. 由(2)知，

$$V(s(m+2),\beta)\subset\bigcup_{\rho>\beta}V(s(m+1),\rho)\subset\bigcup_{\rho>\delta}V(s(m+1),\rho).$$

于是有$x\notin\bigcup_{\beta\geqslant\delta}V(s(m+2),\beta)$. 另一方面，因$\beta_{m+2}\in A_{m+2}$. 由(4)知，$x\in V(s(m+2),\beta_{m+2})$. 从而$\beta_{m+2}<\delta$，此与$\delta$的定义矛盾. (6)真.

由(6)知，为了证明$\eta(s(m+1))$在x点有限，只需证明

$$C=\{\rho<\kappa: x\in V(s(m+1),\rho)\}$$

有限. $\forall n=0,\cdots,n+1$. 令$B_n=\{\rho<\kappa:\kappa+\rho\in A_n\}$. 则$B_n$有限. 只

需证

$$C \subset \bigcup_{n=0}^{m+1} B_n. \tag{7}$$

设 $\rho \in C$，则 $\rho < \kappa$ 且 $x \in V(s(m+1),\rho)$. 因 $x \notin \varnothing = V(s(0),\rho)$，$\exists p \leqslant m$，使得 $x \in V(s(p)+k_p,\rho) \setminus V(s(p),\rho)$. 由(1)知，

$$x \in \mathrm{St}(X \setminus \bigcup_{\beta \neq \kappa+\rho} V(s(p),\beta), \varphi_{s(p+1)}).$$

于是有

$$\exists y \in X \setminus \bigcup_{\beta \neq \kappa+\rho} V(s(p),\beta), x \in \mathrm{St}(y, \varphi_{s(p+1)}). \tag{8}$$

由(4)知，

$$y \in \mathrm{St}(x, \varphi_{s(p+1)}) \subset \bigcup_{\beta \in A_p} V(s(p),\beta).$$

则 $\exists \beta_0 \in A_p$，$y \in V(s(p),\beta_0)$. 由(8)知，$\beta_0 = \kappa+\rho$，从而 $\kappa+\rho \in A_p$，$\rho \in B_p$，(7)真，论断 2 真，证毕.

我们在 3.3.17 中已介绍了在某点 x 的点式(局部)W-加细的概念，现在介绍它们的一种推广.

4.2.5　定义　设 ξ，$\eta_n (n<\omega)$ 是空间 X 的覆盖. $\langle \eta_n \rangle$ 是 ξ 的**点式(局部)W-加细序列**，如果 $\forall x \in X$ $\exists n(x) < \omega$，使得 $\eta_{n(x)}$ 是 ξ 在 x 处的点式(局部)W-加细.

点式 W-加细序列的概念是 Worrell[1967]中为了刻画次亚紧性而引入的.

易见，若 ξ，η 是 X 的覆盖且 $x \in X$，则有

(Ⅰ)　若 η 是 ξ 的加细且 η 在 x 处是点有限的，则 η 是 ξ 在 x 处的点式 W-加细.

(Ⅱ)　若 η 是 ξ 在 x 处的点式 W-加细，则 η 是 ξ 在 x 处的点星形 F-加细.

4.2.6　系　对任意空间 X，下列各条等价：

(Ⅰ)　X 是 κ-次亚紧的；

（Ⅰ）　X 的每个势$\leqslant\kappa$的开覆盖有半开的 θ-加细序列；

（Ⅱ）　X 的每个势$\leqslant\kappa$的开覆盖有半开的点式 W-加细序列.

4.2.7　系(Worrell[1967])　空间 X 是次亚紧的当且仅当 X 的每个开覆盖有开的点式 W-加细序列.

4.2.8　**定理**　空间 X 是 κ-次亚紧的当且仅当 X 的每个势$\leqslant\kappa$的良序开覆盖有开的 θ-加细序列.

证　($\rightarrow$)显然.

($\leftarrow$)对每个基数 $\lambda\leqslant\kappa$，让 $P(\lambda)$表命题："X 的每个势$\leqslant\lambda$的开覆盖有开的点式 W-加细序列."我们用超限归纳法来证明$\forall\lambda\leqslant\kappa$，$P(\lambda)$真. 特别地，$P(\kappa)$真. 于是由系 4.2.6 知，$X$ 是 κ-次亚紧的. 当 λ 有限时，$P(\lambda)$显然真. 现设 $\omega\leqslant\lambda\leqslant\kappa$ 且设任意基数 $\mu<\lambda$，$P(\mu)$真，下面来证 $P(\lambda)$真.

设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\lambda\}$是 X 的开覆盖. $\forall\alpha<\lambda$，令 $G_\alpha=\bigcup_{\beta\leqslant\alpha}U_\beta$. $\{G_\alpha:\alpha<\lambda\}$是 X 的势$\leqslant\kappa$的良序开覆盖. 由定理假设，它有开的 θ-加细序列$\langle\eta_n\rangle$，不妨设 $\eta_n=\{V(n,\alpha):\alpha<\lambda\}$且 $V(n,\alpha)\subset G_\alpha$. $\forall n<\omega$ $\forall\alpha<\lambda$，

$$\xi(n,\alpha)=\{U_\beta:\beta\leqslant\alpha\}\cup\{\bigcup_{\beta>\alpha}V(n,\beta)\}$$

是 X 的开覆盖且$|\xi(n,\alpha)|<\lambda$. 由归纳法假设，它有开的点式 W-加细序列$\langle\varphi_k(n,\alpha)\rangle_{k<\omega}$. $\forall n,k<\omega$，令 $F_{nk}=\{x\in X:|(\eta_n)_x|\leqslant k+1\}$. 它是闭集. $\forall x\in\bigcup_{k<\omega}F_{nk}$，让 $\alpha(x,n)$表有限集$\{\alpha<\lambda:x\in V(n,\alpha)\}$的最大元. $\forall i\leqslant k$，取 $W_i(n,x)\in(\varphi_i(n,\alpha(x,n)))_x$. 令

$$O(n,k,x)=V(n,\alpha(x,n))\cap\bigcap_{i=0}^{k}W_i(n,x).$$

$$\zeta_{nk}=\{O(n,k,x):x\in F_{nk}\}\cup\{X\setminus F_{nk}\}.$$

则 ζ_{nk}是 X 的开覆盖. 下证$\langle\zeta_{nk}\rangle_{n,k<\omega}$是 ξ 的开的点式 W-加细序列，从而 $P(\lambda)$真，定理即可得证.

设 $x\in X$，$\exists n<\omega$，使得

$$(\eta_n)_x = \{V(n,\alpha_0),\cdots,V(n,\alpha_h)\}.$$

则 $x\in F_{nh}$. $\forall i\leqslant h\ \exists k(i)<\omega\ \ni$ 有限子族 $\xi_i\subset\xi(n,\alpha_i)$，使得 $(\varphi_{k(i)}(n,\alpha_i))_x$ 部分加细 ξ_i. 令 $\xi'=\bigcup_{i=0}^{h}(\xi_i\cap\xi)$，$k=\max\{h,k(0),\cdots,k(h)\}$. 只需证

$$(\zeta_{nk})_x \text{ 部分加细 } \xi'. \tag{1}$$

事实上，设 $x\in G\in\zeta_{nk}$，因 $x\in F_{nh}\subset F_{nk}$，$G\neq X\setminus F_{nk}$. 则 $\exists y\in F_{nk}$，$G=O(n,k,y)$，$x\in G\subset V(n,\alpha(y,n))\in\eta_n$. 则 $\exists i\leqslant h$，$\alpha(y,n)=\alpha_i$. 又有

$$x\in G\subset W_{k(i)}(n,y)\in\varphi_{k(i)}(n,\alpha_i).$$

$\exists U\in\xi_i$，$W_{k(i)}(n,y)\subset U$，$y\in O(n,k,y)\subset U\in\xi(n,\alpha_i)$. 由 $\alpha_i=\alpha(y,n)$ 的定义知，$y\notin\bigcup_{\beta>\alpha_i}V(n,\beta)$，故 $U\neq\bigcup_{\beta>\alpha_i}V(n,\beta)$. 于是 $U\in\xi_i\cap\xi$，$G=O(n,k,y)\subset U\in\xi'$. (1)真. 证毕.

4.2.9 系(Junnila[1978]) 空间 X 是次亚紧的当且仅当 X 的每个良序开覆盖有开的 θ-加细序列.

4.2.10 系 空间 X 是 κ-次亚紧的当且仅当 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持开覆盖有开的 θ-加细序列.

证 因为良序开覆盖是内部保持的. 证毕.

4.2.11 系 若空间 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持开覆盖有内部保持开的点星形 $\dot{F}$-加细序列，则 X 是 κ-次亚紧的.

证 在定理 4.2.4 的证明中，如果 ξ 与每个 $\varphi_{s+k}(s\in\omega^{<\omega},k<\omega)$ 皆是内部保持开覆盖，则所构成的每个 $\eta(s)$ 也是内部保持开覆盖. 在本系的假设下，由该定理的证明可证得：X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持开覆盖有(内部保持)开的 θ-加细序列. 由前一系知，X 是 κ-次亚紧的. 证毕.

4.2.12 引理 设空间 X 的开覆盖 ξ 有内部保持开的点星形加细序列 (η_n)，则 ξ 有 σ-闭包保持闭加细 φ. 如果 (η_n) 还是 ξ 的局部星形加细序列，则 $\{F^\circ : F\in\varphi\}$ 覆盖 X.

证　设 $\xi=\{U_s: s\in S\}$. $\forall n<\omega\forall s\in S$，令

$$F_{ns}=\{x\in X: \mathrm{St}(x,\eta_n)\subset U_s\}.$$

则 $F_{ns}\subset U_s$. 下证

若 $\exists y\in F_{ns}\cap\bigcap(\eta_n)_x$，则 $x\in F_{ns}$. (1)

结果 F_{ns} 是闭集. 事实上，因 $y\in\bigcap(\eta_n)_x$，$(\eta_n)_x\subset(\eta_n)_y$. 又 $y\in F_{ns}$，则

$$\mathrm{St}(x,\eta_n)\subset\mathrm{St}(y,\eta_n)\subset U_s.$$

$x\in F_{ns}$. (1)真.

$\forall x\in X\setminus F_{ns}$，由(1)知，$\bigcap(\eta_n)_x\subset X\setminus F_{ns}$. 因 η_n 是内部保持开覆盖，$\bigcap(\eta_n)_x\in N(x)$，故 $X\setminus F_{ns}$ 是开集.

$\forall n<\omega$，$\varphi_n=\{F_{ns}: s\in S\}$ 是闭包保持闭集族. (2)

设 $n<\omega$，$T\subset S$. $\forall x\in\overline{\bigcup_{s\in T}F_{ns}}$，因 $\bigcap(\eta_n)_x\in N(x)$，$\exists s_0\in T$，使得

$$\bigcap(\eta_n)_x\cap F_{ns_0}\neq\varnothing.\ \text{由(1)知}\ x\in F_{ns_0}，\text{则}\ \overline{\bigcup_{s\in T}F_{ns}}=\bigcup_{s\in T}F_{ns}.$$

(2)真.

令 $\varphi=\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$. $\forall x\in X\ \exists n<\omega\ \exists s\in S$，$\mathrm{St}(x,\eta_n)\subset U_s$. 则 $x\in F_{ns}$，$\bigcup\varphi=X$，从而 φ 是 ξ 的 σ-闭包保持闭加细.

若 $\langle\eta_n\rangle$ 还是 ξ 的局部星形加细序列，$\forall x\in X\exists n<\omega\ \exists G\in N(x)\ \exists s\in S$，使得 $\mathrm{St}(G,\eta_n)\subset U_s$. 则 $G\subset F_{ns}$，从而 $x\in F^\circ_{ns}$，$\{F^\circ: F\in\varphi\}$ 覆盖 X. 证毕.

4.2.13　引理　设 ξ 是空间 X 的内部保持开覆盖. $\varphi=\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$ 是 X 的 σ-闭包保持闭覆盖. $\forall n<\omega$，$\forall x\in X$，令

$$W(n,x)=(X\setminus\bigcup\{F\in\varphi_n: x\notin F\})\cap\bigcap(\xi)_x.$$

则 $\eta_n=\{W(n,x): x\in X\}$ 是 X 的内部保持开覆盖，使得

(Ⅰ)　若 φ 是 ξ 的加细. 则 $\langle\eta_n\rangle$ 是 ξ 的点星形加细序列. 若 $\{F^\circ: F\in\varphi\}$ 还覆盖 X，则 $\langle\eta_n\rangle$ 是 ξ 的局部星形加细序列.

（Ⅲ）　若 φ 是 ξ^F 的加细，则 $\langle\eta_n\rangle$ 是 ξ 的点式 W-加细序列．若 $\{F^\circ : F\in\varphi\}$ 还覆盖 X，则 $\langle\eta_n\rangle$ 是 ξ 的局部 W-加细序列．

证　$\forall n<\omega$，每个 $W(n,x)$ 是含 x 的开集，故 η_n 是 X 的内部保持开覆盖．

（Ⅱ）　若 φ 是 ξ 的加细．$\forall n<\omega\forall F\in\varphi_n\ \exists U(n,F)\in\xi$，使得 $F\subset U(n,F)$，则有

$$\mathrm{St}(F,\eta_n)\subset U(n,F). \tag{1}$$

事实上，设 $W(n,y)\in\eta_n$，使得 $F\cap W(n,y)\neq\varnothing$，则 $U(n,y)\in(\xi)_y$．$W(n,y)\subset\bigcap(\xi)_y\subset U(n,F)$．(1)真．

$\forall x\in X\ \exists n<\omega\exists F\in\varphi_n$，$x\in F$．由(1)知，$\mathrm{St}(x,\eta_n)\subset U(n,F)$，$\langle\eta_n\rangle$ 是 ξ 的点星形加细序列．

若 $\{F^\circ : F\in\varphi\}$ 还覆盖 X．$\forall x\in X\ \exists n<\omega\ \exists F\in\varphi_n$，$x\in F^\circ$，由(1)知，$\mathrm{St}(F^\circ,\eta_n)\subset U(n,F)$．$\langle\eta_n\rangle$ 是 ξ 的局部星形加细序列．

（Ⅲ）　设 φ 是 ξ^F 的加细．$\forall n<\omega\forall F\in\varphi_n$，存在有限子族 $\xi(n,F)\subset\xi$，使得 $F\subset\bigcup\xi(n,F)$，则有

$$(\eta_n)_F\ \text{部分加细}\ \xi(n,F). \tag{2}$$

设 $W(n,y)\in\eta_n$，使得 $W(n,y)\cap F\neq\varnothing$．$y\in F\subset\bigcup\xi(n,F)$．则 $\exists U\in\xi(n,F)$，$y\in U$，$U\in(\xi)_y$．$W(n,y)\subset\bigcap(\xi)_y\subset U\in\xi(n,F)$．(2)真．

$\forall x\in X\ \exists n<\omega\ \exists F\in\varphi_n$，$x\in F$．由(2)知，$(\eta_n)_x$ 部分加细 $\xi(n,F)$，$\langle\eta_n\rangle$ 是 ξ 的点式 W-加细序列．

若 $\{F^\circ : F\in\varphi\}$ 还覆盖 X，$\forall x\in X\ \exists n<\omega\ \exists F\in\varphi_n$，$x\in F^\circ$．由(2)知，$(\eta_n)_{F^\circ}$ 部分加细 $\xi(n,F)$．则 $\langle\eta_n\rangle$ 是 ξ 的局部 W-加细序列．证毕．

4.2.14　引理　设 ξ 是空间 X 的内部保持开覆盖．则

（Ⅰ）　ξ 有内部保持开的点星形加细序列当且仅当 ξ 有 σ-闭包保持闭加细．

（Ⅱ）　ξ 有内部保持开的局部星形加细序列当且仅当 ξ 有 σ-

闭包保持闭加细 φ，使得$\{F^\circ : F\in\varphi\}$覆盖 X.

证 由前二引理可知.

4.2.15 引理 设 ξ 是空间 X 的内部保持开覆盖，则下列各条等价：

（Ⅰ） ξ 有内部保持开的点式 W-加细序列；

（Ⅱ） ξ 有内部保持开的点星形 $\dot{F}$-加细序列；

（Ⅲ） ξ^F 有内部保持开的点星形加细序列.

证 （Ⅰ）→（Ⅱ）及（Ⅱ）→（Ⅲ）显然.

（Ⅲ）→（Ⅰ）由假设（Ⅲ）及 4.2.14 知 ξ^F 有 σ-闭包保持闭加细. 据 4.2.13，ξ 有内部保持开的点式 W-加细序列，证毕.

4.2.16 引理 若空间 X 的开覆盖 ξ 有开的 θ-加细序列(η_n)，则 X 有 σ-闭包保持闭覆盖 φ，使得

$$\forall x\in X\ \exists F_x\in\varphi\ \exists\text{有限子族}\ \xi_x\subset(\xi)_x，\text{使得}\ x\in F_x\subset\bigcup\xi_x. \tag{1}$$

若(η_n)还是 ξ 的局部 θ-加细序列，则

$$\forall x\in X\ \exists F_x\in\varphi\ \exists G\in N(x)\ \exists\text{有限子族}\ \xi_x\subset(\xi)_G，\text{使得}$$

$$x\in F^\circ_x\subset F_x\subset\bigcup\xi_x. \tag{2}$$

证 $\forall n,k<\omega$，$H_{nk}=\{x\in X : |(\eta_n)_x|\leqslant k+1\}$是闭集. 令 $S_n=[\eta_n]^{<\omega}$，$\forall s\in S_n$，令

$$F_{nk}(s)=H_{nk}\cap(X\setminus\bigcup(\eta_n\setminus s)).$$

则有

$$\forall n,k<\omega,\ \varphi_{nk}=\{F_{nk}(s) : s\in S_n\}\text{是闭包保持闭集族}. \tag{3}$$

事实上，$\{H_{nk}\cap V : V\in\eta_n\}$在 H_{nk}内是点有限的，从而是内部保持的. $\{H_{nk}\cap\bigcup(\eta_n\setminus s) : s\in S_n\}$是 H_{nk}内的内部保持开集族. 于是

$$\varphi_{nk}=\{H_{nk}\setminus(H_{nk}\cap\bigcup(\eta_n\setminus s) : s\in S_n)\}$$

是闭集 H_{nk}内的，从而是 X 内的闭包保持闭集族，(3)真.

$\forall x\in X\ \exists n,k<\omega$，使得$|(\eta_n)_x|=k+1$. 则 $x\in H_{nk}\cap(X\setminus\bigcup(\eta_n\setminus$

$(\eta_n)_x)) = F_{nk}((\eta_n)_x)$. $\varphi = \bigcup_{n,k<\omega} \varphi_{nk}$是 X 的 σ-闭包保持闭覆盖. 令 $F_x = F_{nk}((\eta_n)_x)$,则 $x \in F_x$. $\forall V \in (\eta_n)_x \exists\ U(V) \in \xi, x \in V \subset U(V)$. 令 $\xi_x = \{U(V) : V \in (\eta_n)_x\}$,则 $x \in F_x \subset \bigcup \xi_x$. (1)真.

若$\langle \eta_n \rangle$还是 ξ 的局部 θ-加细序列. $\forall x \in X\ \exists n, k < \omega\ \exists G \in N(x)$, $|(\eta_n)_G| = k+1$. 令 $F_x = F_{nk}((\eta_n)_G)$. 则 $G \subset F_x$ 从而 $x \in F^\circ_x$. $\forall V \in (\eta_n)_G$ $\exists U(V) \in \xi, V \subset U(V)$. 则 $U(V) \cap G \supset V \cap G \neq \varnothing$. $\xi_x = \{U(V) : V \in (\eta_n)_G\}$是$(\xi)_G$ 的有限子族. 易知,$F_x \subset \bigcup \xi_x$. (2)真. 证毕.

4.2.17　定理　对任意空间 X,下列各条等价:

(Ⅰ)　X 是 κ-次亚紧的;

(Ⅱ)　X 的每个势$\leqslant\kappa$ 的定向开覆盖有 σ-闭包保持闭加细;

(Ⅲ)　X 的每个势$\leqslant\kappa$ 的内部保持定向开覆盖有 σ-闭包保持闭加细;

(Ⅳ)　X 的每个势$\leqslant\kappa$ 的内部保持定向开覆盖有内部保持开的点星形加细序列;

(Ⅴ)　X 的每个势$\leqslant\kappa$ 的内部保持定向开覆盖有内部保持开的点星形 F-加细序列;

(Ⅵ)　X 的每个势$\leqslant\kappa$ 的内部保持定向开覆盖有内部保持开的点式 W-加细序列.

证　(Ⅰ)→(Ⅱ)设 ξ 是 κ-次亚紧空间 X 的势$\leqslant\kappa$ 的定向开覆盖,则 ξ 有开的 θ-加细序列. 由前一引理知,X 有 σ-闭包保持闭覆盖 φ,使得$\forall x \in X\ \exists F_x \in \varphi\ \exists$有限的 $\xi_x \subset (\xi)_x, x \in F_x \subset \bigcup \xi_x$. 因 ξ 是定向的,$\exists U_0 \in \xi, \bigcup \xi_x \subset U_0$. 则$\{F_x : x \in X\}$是 ξ 的 σ-闭包保持闭加细.

(Ⅱ)→(Ⅲ)显然.

(Ⅲ)→(Ⅳ)由 4.2.14 知.

(Ⅳ)→(Ⅰ)设 ξ 是 X 的势$\leqslant\kappa$ 的内部保持开覆盖. 则 ξ^F 是 X

的势$\leqslant\kappa$的内部保持定向开覆盖. 由假设(Ⅳ),ξ''有内部保持开的点星形加细序列. 据4.2.15,ξ有内部保持开的点星形F-加细序列. 据系4.2.11,X是κ-次亚紧的.

(Ⅳ)$\leftrightarrow$(Ⅴ)$\leftrightarrow$(Ⅵ)由4.2.15知. 证毕.

4.2.18　系(Junnila[1978])　对任意空间X,下列各条等价:

(Ⅰ)　X是次亚紧的;

(Ⅱ)　X的每个内部保持定向开覆盖有内部保持开的点星形加细序列;

(Ⅲ)　X的每个内部保持定向开覆盖有σ-闭包保持闭加细;

(Ⅳ)　X的每个定向开覆盖有σ-闭包保持闭加细.

4.2.19　系　设X是κ-次亚紧空间$f:X\to Y$是闭的满映射,则Y是κ-次亚紧的.

证　设$\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$Y$的定向开覆盖,则$\{f^{-1}[U_\alpha]:\alpha<\kappa\}$是$X$的定向开覆盖,从而它有$\sigma$-闭包保持闭加细$\varphi$. 则$\{f[F]:F\in\varphi\}$是$\xi$的$\sigma$-闭包保持闭加细. Y是κ-次亚紧的,证毕.

4.2.20　系(Junnila[1978])　次亚紧空间的闭连续像是次亚紧的.

4.2.21　定理　设X是正则空间,Y是次亚紧空间,且$f:X\to Y$是闭的满映射,使得$\forall y\in Y$,$f^{-1}[y]$是Lindelöf的. 则X是次亚紧的.

证　设ξ是X的开覆盖. η是X的开覆盖,使得$\{\overline{V}:V\in\eta\}$加细$\xi$. $\forall y\in Y$,η有可数子族$\eta(y)=\{V(y,n):n<\omega\}$,使得$f^{-1}[y]\subset\bigcup\eta(y)$. $\forall n<\omega\ \exists U(y,n)\in\xi$,$\overline{V(y,n)}\subset U(y,n)$. 令

$$W(y,n)=(U(y,n)\setminus\bigcup_{i<n}\overline{V(y,i)})\cap(\bigcup\eta(y)).$$

则开集族$\zeta(y)=\{W(y,n):n<\omega\}$覆盖$f^{-1}[y]$且

$$\forall x\in\bigcup\zeta(y),\ (\zeta(y))_x\text{有限}. \tag{1}$$

令 $G(y)=\mathrm{sat}(f,\bigcup\zeta(y))$，则 $\{f[G(y)]:y\in Y\}$ 是 Y 的开覆盖，从而它有一个开的 θ-加细序列 $\langle\delta_n\rangle$. $\forall n<\omega\ \forall H\in\delta_n\exists y(n,H)\in Y$，使得 $H\subset f[G(y(n,H))]$. $\forall n<\omega$，令

$$\varphi_n=\{W(y(n,H),k)\cap f^{-1}[H]:H\in\delta_n,k<\omega\}.$$

则 φ_n 是 ξ 的开加细且由(1)知，$\langle\varphi_n\rangle$ 是 ξ 的开的 θ-加细序列. X 是次亚紧的，证毕.

设 $\xi_0,\cdots,\xi_n$ 是空间 X 的覆盖，则

$$\xi=\{U_0\cap\cdots\cap U_n:\forall i\in n+1,U_i\in\xi_i\}$$

是 X 的覆盖且是每个 ξ_i 的加细. 今后记为 $\xi=\bigwedge_{i=0}^{n}\xi_i$.

4.2.22　引理　(Ⅰ)　设 $\xi_0,\cdots,\xi_n$ 是空间 X 的半开覆盖，则 $\xi=\bigwedge_{i=0}^{n}\xi_i$ 是 X 的半开覆盖.

(Ⅱ)　设 ξ 是空间 X 的半开覆盖且 $f:X\to Y$ 是伪开映射，则 $\eta=\{f[U]:U\in\xi\}$ 是 Y 的半开覆盖.

证　(Ⅰ)显然.

(Ⅱ)因 $\forall y\in Y,\mathrm{St}(y,\eta)=f[\mathrm{St}(f^{-1}[y],\xi)]$，由伪开映射的定义直接知. 证毕.

4.2.23　定义　$f:X\to Y$ 是**有限到一的**，如果对 $\forall y\in Y$，$|f^{-1}[y]|<\omega$.

4.2.24　引理　设 X 是 κ-次亚紧空间且 $f:X\to Y$ 是伪开的有限到一映射，则 Y 是 κ-次亚紧的.

证　设 ξ 是 Y 的势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖. 则 $\{f^{-1}[U]:U\in\xi\}$ 是 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖，从而它有开的 θ-加细序列 $\langle\eta_n\rangle$. $\forall n<\omega,\zeta_n=\bigwedge_{i=1}^{n}\eta_i$ 是 X 的半开覆盖. $\varphi_n=\{f[W]:W\in\zeta_n\}$ 是 Y 的半开覆盖. 为证 Y 是 κ-次亚紧的，只需再证

$$\langle\varphi_n\rangle\text{是 }\xi\text{ 的点星形 }F\text{-加细序列}.\tag{1}$$

设 $y\in Y$ 且设 $f^{-1}[y]=\{x_0,\cdots,x_k\}$. $\forall i\leqslant k$ $\exists n_i<\omega$,使得 $(\eta_{n_i})_{x_i}$ 是有限的,则 $\eta'=\bigcup_{i=0}^{k}(\eta_{n_i})_{x_i}$ 是有限的. $\forall V\in\eta'$ $\exists U(V)\in\xi$, $V\subset f^{-1}[U(V)]$. 令 $\xi'=\{U(V): V\in\eta'\}$. 它是 ξ 的有限子族且 $y\in\bigcap\xi'$,令 $m=\max\{n_0,\cdots,n_k\}$,则

$$\mathrm{St}(f^{-1}[y],\zeta_m)\subset f^{-1}[\bigcup\xi'],$$

从而

$$\mathrm{St}(y,\varphi_m)=f[\mathrm{St}(f^{-1}[y],\zeta_m)]\subset\bigcup\xi'.$$

(1)真,证毕.

4.2.25　引理　设 $\{A_s: s\in S\}$ 是集 X 内的点有限子集族且集族 $\{D_{sn}: s\in S, n<\omega\}$ 满足条件:

$$\forall s\in S, A_s\supset D_{s0}\supset D_{s1}\supset D_{s2}\supset\cdots,$$

$$\text{则}\ \bigcup_{s\in S}(\bigcap_{n<\omega}D_{sn})=\bigcap_{n<\omega}(\bigcup_{s\in S}D_{sn}).$$

证　$\forall s\in S$, $\bigcap_{n<\omega}D_{sn}\subset\bigcap_{n<\omega}(\bigcup_{s\in S}D_{sn})$,从而

$$\bigcup_{s\in S}(\bigcap_{n<\omega}D_{sn})\subset\bigcap_{n<\omega}(\bigcup_{s\in S}D_{sn}).\tag{1}$$

反之,设 $x\in\bigcap_{n<\omega}(\bigcup_{s\in S}D_{sn})$. $\forall n<\omega$, $\{D_{sn}: s\in S\}$ 是点有限的,故 $S_n=\{s\in S: x\in D_{sn}\}$ 是不空的有限集,使得 $S_{n+1}\subset S_n$,于是 $\exists t\in\bigcap_{n<\omega}S_n$. 由 S_n 的定义知, $x\in\bigcap_{n<\omega}D_{tn}\subset\bigcup_{s\in S}(\bigcap_{n<\omega}D_{sn})$. 即

$$\bigcap_{n<\omega}(\bigcup_{s\in S}D_{sn})\subset\bigcup_{s\in S}(\bigcap_{n<\omega}D_{sn}).\tag{2}$$

由(1),(2)即知引理真. 证毕.

4.2.26　引理　设 $\eta=\{V_s: s\in S\}$ 是空间 X 的开覆盖. $\forall s\in S$,令

$$\tilde{V}_s=V_s\setminus\bigcup\{V_t: t\in S\setminus\{s\}\}.$$

则 $\tilde{\eta}=\{\tilde{V}_s: s\in S\}$ 是离散闭集族.

4.2.27　定理　设 X 是集体 δ-正规空间,则 X 的每个点有限开覆盖有 σ-离散闭加细.

证　先证

论断1　若 η 是 X 的点有限开覆盖，则 η 有一个 σ-离散闭的部分加细 φ 且 X 有一个 G_δ-集 Q，使得

$$\bigcup \tilde{\eta} \subset Q \subset \bigcup \varphi. \tag{1}$$

其中 $\tilde{\eta}=\{\tilde{V}: V\in\eta\}$，$\tilde{V}=V\setminus\bigcup(\eta\setminus\{V\})$.

证　因 $\tilde{\eta}$ 是离散闭集族，存在互不相交的 G_δ-集族 $\{B(V): V\in\eta\}$，使得 $\tilde{V}\subset B(V)$. 设 $B(V)=\bigcap_{n<\omega}B_n(V)$，每个 $B_n(V)$ 是开集且 $B_{n+1}(V)\subset B_n(V)\subset V$，$n<\omega$. $\forall n<\omega$，$B_n=\bigcup\{B_n(V): V\in\eta\}$ 是开集且

$$\bigcup \tilde{\eta} \subset \bigcup \{B(V): V\in\eta\} \subset B_n.$$

因 X 是 δ-正规的，存在不相交的 G_δ-集 Q_n 与 W_n，使得

$$\bigcup \tilde{\eta} \subset Q_n,\ X\setminus B_n \subset W_n. \tag{2}$$

设 $Q_n=\bigcap_{k<\omega}Q_{nk}$，$W_n=\bigcap_{k<\omega}W_{nk}$，每个 Q_{nk}，W_{nk} 是开集. $\forall n,k<\omega$，令

$$\delta_{nk}=\{W_{nk}\cap V: V\in\eta\}\cup\{B_n(V): V\in\eta\}.$$

则 δ_{nk} 是 η 的开加细. $\delta=\bigcup_{n,k<\omega}\tilde{\delta}_{nk}$ 是 η 的 σ-离散闭的部分加细. $Q=\bigcap_{n<\omega}Q_n$ 是 G_δ-集且由(2)知，$\bigcup\tilde{\eta}\subset Q$. 设 $x\in Q$. $\forall n<\omega$，$x\notin W_n$，由(2)及引理4.2.25知，

$$x\in\bigcap_{n<\omega}B_n=\bigcup\{\bigcap_{n<\omega}B_n(V): V\in\eta\}.$$

则 $\exists V_0\in\eta$，$x\in\bigcap_{n<\omega}B_n(V_0)=B(V_0)$. 于是有

$$x\notin\bigcup\{B(V): V\neq V_0\}=\bigcap_{n<\omega}\bigcup\{B_n(V): V\neq V_0\}.$$

$\exists m<\omega$，$x\notin\bigcup\{B_m(V): V\neq V_0\}$. 但 $x\in\bigcap_{n<\omega}B_n(V_0)\subset B_m(V_0)$.

其次有

$$x\in Q\subset Q_m,\ x\notin W_m=\bigcap_{k<\omega}W_{mk}.$$

$\exists k<\omega$，$x\notin W_{mk}$，于是 $x\in\tilde{B}_m(V_0)\in\tilde{\delta}_{mk}$，即 $x\in\bigcup\delta$，(1)真. 论断1证毕.

现设 ξ 是 X 的点有限开覆盖. $\forall n<\omega$，令

$$K_n=\{x\in X: |(\xi)_x|<n+1\}.$$

论断 2　$\forall n<\omega$，ξ 有 σ-离散闭的部分加细 φ_n，X 有 G_δ-集 A_n，使得

$$K_n \subset A_n \subset \bigcup \varphi_n. \tag{3}$$

证　$K_0=\varnothing$．令 $\varphi_0=\varnothing$，$A_0=\varnothing$．现设 $n<\omega$ 且已构成 φ_n 与 A_n 满足条件(3)．下面来构造 A_{n+1} 与 φ_{n+1}．设 $A_n=\bigcap_{k<\omega} Q_k$，每个 Q_k 是开集．$\forall k<\omega$，令

$$\zeta_k=\{Q_k\cap U:U\in\xi\}\cup\{\bigcap\eta:\eta\in[\xi]^{n+1}\}.$$

易知，ζ_k 是 ξ 的点有限开加细，使得

$$K_{n+1}\setminus Q_k\subset\bigcup\zeta_k. \tag{4}$$

由论断1知，$\forall k<\omega$，ζ_k 有一个 σ-离散闭的部分加细 θ_k，X 有 G_δ-集 B_k，使得

$$\bigcup\zeta_k\subset B_k\subset\bigcup\theta_k.$$

令

$$\varphi_{n+1}=\varphi_n\cup\bigcup_{k<\omega}\theta_k,\ A_{n+1}=\bigcap_{k<\omega}(Q_k\cup B_k).$$

则 φ_{n+1}是 ξ 的 σ-离散闭的部分加细．A_{n+1}是 G_δ-集．$\forall k<\omega$，由(4)知，

$$K_{n+1}\subset(K_{n+1}\setminus Q_k)\cup Q_k\subset B_k\cup Q_k,$$

从而 $K_{n+1}\subset A_{n+1}$．设 $x\in A_{n+1}$．若 $x\in A_n\subset\bigcup\varphi_n\subset\bigcup\varphi_{n+1}$．若 $x\notin A_n$，则 $\exists k<\omega$，$x\notin Q_k$．因为 $x\in A_{n+1}\subset Q_k\cup B_k$，$x\in B_k\subset\bigcup\theta_k\subset\bigcup\varphi_{n+1}$．归纳法完成．论断2真．

令 $\varphi=\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$．因 $\bigcup\varphi\supset\bigcup_{n<\omega}K_n=X$，$\varphi$ 是 ξ 的 σ-离散闭加细．证毕．

4.2.28　引理　次仿紧空间是集体次正规的．

证　设$\{F_s:s\in S\}$是次仿紧空间 X 内的离散闭集族．$\forall s\in S$，令

$$G_s=X\setminus\bigcup\{F_t:t\in S\setminus\{s\}\}.$$

则 $\xi=\{G_s:s\in S\}$是 X 的开覆盖．于是 ξ 有一个加细 $\varphi=\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，每个 φ_n 是离散闭集族．对$\forall n<\omega$，令 $C_n=\bigcup\varphi_n$，则$\{C_n:n<\omega\}$是 X 的可数闭覆盖．$\forall s\in S$，令

$$U_{ss} = C_s \setminus \bigcup \{C \in \varphi_s : C \cap F_s = \varnothing\},$$

则$\{U_{ss} : s \in S\}$是C_s内的互不相交开集族，使得

$$F_s \cap C_s \subset U_{ss}.$$

X是集体次正规的.证毕.

4.2.29　定理　对任意空间X，下列各条等价：

（Ⅰ）　X是次仿紧的；

（Ⅱ）　(Chaber[1979])　X是集体次正规和次亚紧的；

（Ⅲ）　(Junnila[1980])　X是集体δ-正规和次亚紧的.

证　（Ⅰ）→（Ⅱ）由4.2.28知.

（Ⅱ）→（Ⅲ）由3.2.29知.

（Ⅲ）→（Ⅰ）设ξ是集体δ-正规次亚紧空间X的开覆盖.据4.2.22，X有可数闭覆盖$\{F_n : n<\omega\}$，使得$\forall n<\omega$，$\xi|F_n$在F_n内有点有限的开加细.由4.2.27知$\xi|F_n$有在闭集F_n内的，从而在X内的σ-离散闭加细φ_n.则$\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$是$\xi$的$\sigma$-离散闭加细.X是次仿紧的.证毕.

4.2.30　定义　（Ⅰ）设$\kappa \geqslant \omega$.空间X是**κ-次亚可膨胀的**（**κ-离散次亚可膨胀的**），如果对X内每个局部有限（离散）闭集族$\{F_\alpha : \alpha<\kappa\}$，$X$内有一列开集族$(\eta_n = \{V_{n\alpha} : \alpha<\kappa\})_{n<\omega}$，使得$\forall n<\omega\ \forall \alpha<\kappa$，$F_\alpha \subset V_{n\alpha}$且$\forall x \in X\ \exists n(x)<\omega$，使得$\eta_{n(x)}$在$x$是点有限的.

（Ⅱ）空间X是**次亚可膨胀（离散次亚可膨胀）的**，如果$\forall \kappa \geqslant \omega$，$X$是$\kappa$-次亚可膨胀（$\kappa$-离散次亚可膨胀）的.

（离散）次亚可膨胀空间是Katuta[1975]引入的，原来分别称之为**θ-可膨胀空间**和**离散θ-可膨胀空间**.

4.2.31　引理　κ-次亚紧空间是κ-次亚可膨胀的.

证　设$\{F_\alpha : \alpha<\kappa\}$是$\kappa$-次亚紧空间$X$内的局部有限闭集族.令

$$\xi = \{U(s) : s \in [\kappa]^{<\omega}\},$$

其中 $U(s)=X\setminus\bigcup\{F_\alpha:\alpha\in\kappa\setminus s\}$. 则 ξ 是 X 的开覆盖且 $|\xi|\leqslant\kappa$. 设 $\langle\eta_n\rangle$ 是 ξ 的开的 θ-加细序列. $\forall n<\omega$　$\forall\ \alpha<\kappa$, 令

$$W_{n\alpha}=\mathrm{St}(F_\alpha,\eta_n),\zeta_n=\{W_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}.$$

则 $F_\alpha\subset W_{n\alpha}$. $\forall x\in X$ $\exists n<\omega$, 使得 $(\eta_n)_x=\{V_0,\cdots,V_k\}$ 是有限的. $\forall i\leqslant k$ $\exists s_i\in[\kappa]^{<\omega}$, 使得 $V_i\subset U(s_i)$. 令 $B=\{\alpha<\kappa:x\in W_{n\alpha}\}$. 则有 $B\subset\bigcup_{i=0}^{k}s_i$, 从而它是有限的. X 是 κ-次亚可膨胀的. 证毕.

4.2.32　引理　若空间 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持开覆盖有半开的点星形加细序列, 则 X 是 κ-集体次正规和 κ-次亚可膨胀的.

证　(Ⅰ)设 $\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 内的离散闭集族. 令 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$, 其中 $U_\alpha=X\setminus\bigcup\{F_\beta:\beta\neq\alpha\}$. 则 ξ 是 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持开覆盖, 从而有一个半开的点星形加细序列 $\langle\eta_n\rangle$. $\forall n<\omega$ $\forall\alpha<\kappa$, 令 $V_{n\alpha}=(\mathrm{St}(F_\alpha,\eta_n))^\circ$. 则 $F_\alpha\subset V_{n\alpha}$. 再令 $\eta_n=\{V_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}$. 则 $\forall x\in X$ $\exists n<\omega$, $|(\eta_n)_x|\leqslant1$. X 是 κ-集体次正规的.

(Ⅱ)设 $\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 内的局部有限闭集族. 令

$$\xi=\{U_s:s\in[\kappa]^{<\omega}\},$$

其中 $U_s=X\setminus\bigcup\{F_\alpha:\alpha\notin s\}$. 则 ξ 是 X 的势不大于 κ 的内部保持开覆盖, 从而它有半开的点星形加细序列 $\langle\eta_n\rangle$. $\forall\alpha<\kappa$, 令

$$V_{n\alpha}=(\mathrm{St}(F_\alpha,\eta_n))^\circ.$$

则 $F_\alpha\subset V_{n\alpha}$. 易知, $\forall x\in X$ $\exists n<\omega$, $|(\eta_n)_x|<\omega$, 故 X 是 κ-次亚可膨胀的. 证毕.

4.2.33　定理　空间 X 是次仿紧的当且仅当它的每个内部保持开覆盖有 σ-闭包保持闭加细.

证　($\rightarrow$)显然.

($\leftarrow$)由假设及系4.2.18知, X 是次亚紧的. 由假设及4.2.14知, X 的每个内部保持开覆盖有开的点星形加细序列. 据4.2.32,

X 是集体次正规的. 据4.2.29, X 是次仿紧的. 证毕.

4.2.34　引理　空间 X 是次仿紧的当且仅当它的每个开覆盖有半开的点星形加细序列.

证　($\rightarrow$)显然.

($\leftarrow$)设空间 X 的每个开覆盖有半开的点星形加细序列, 则 X 是集体次正规的. 据4.2.4, X 是次亚紧的. 据4.2.29, X 是次仿紧的. 证毕.

4.2.35　引理　设 ξ 是空间 X 的开覆盖且 $A\subset X$. 则 ξ 有一个部分垫状加细 φ 覆盖 A 当且仅当 X 有一个半开覆盖 η, 它在 A 的每一点处点星形加细 ξ.

证　($\rightarrow$)设 ξ 有一个部分垫状加细 φ 覆盖 A. 让 $f:\varphi\rightarrow\xi$ 表垫状函数. 则 $\forall\varphi'\subset\varphi$,

$$\overline{\bigcup\varphi'}\subset\bigcup\{f(G):G\in\varphi'\}.$$

$\forall x\in\bigcup\varphi$, 取一个 $G_x\in\varphi$, 使得 $x\in G_x\subset f(G_x)$. $\forall x\in X$, 令

$$V_x=\begin{cases}f(G_x), & \text{当 } x\in\bigcup\varphi,\\ X, & \text{当 } x\notin\bigcup\varphi.\end{cases}$$

则 $V_x\in N(x)$. 下证

$$\forall B\subset X, \overline{B}\subset\bigcup_{x\in B}V_x. \tag{1}$$

事实上, 若 $\exists x\in B\setminus\bigcup\varphi$, 则 $\overline{B}\subset X=V_x$. 若 $B\subset\bigcup\varphi$. $\forall x\in B, x\in G_x$, 则

$$\overline{B}\subset\overline{\bigcup_{x\in B}G_x}\subset\bigcup_{x\in B}f(G_x)=\bigcup_{x\in B}V_x.$$

(1)真.

$\forall x\in X$, 令 $W_x=X\setminus\{y\in X:x\notin V_y\}$. 则由(1)知, $x\in W_x^{\circ}$.

令

$$\eta=\{\{x,y\}:x\in V_y \text{ 且 } y\in V_x\}.$$

$\forall x\in X$, 因 $x\in V_x$, $x\in\{x,x\}\in\eta$. η 是 X 的覆盖. 因为 $V_x\cap W_x\subset$

$St(x,\eta)$，η 是半开的. 其次，$\forall x\in A\subset\bigcup\varphi$，$V_x=f(G_x)\in\xi$ 且易知，$St(x,\eta)\subset V_x$.

(←) 设 X 有一个半开覆盖 η 在 A 的每一点处点星形加细 ξ. $\forall B\subset X$，令 $G(B)=\{x\in X: St(x,\eta)\subset B\}$，则 $\overline{G(B)}\subset B$. 令

$$\varphi=\{G(U): U\in\xi\}.$$

则 φ 覆盖 A. $\forall U\in\xi$，在族 $\{U'\in\xi: G(U')=G(U)\}$ 中取定一元记为 U^*. 令 $f(G(U))=U^*$，则

$$f:\varphi\to\xi.$$

$\forall\xi'\subset\xi$，有

$$\overline{\bigcup\{G(U): U\in\xi'\}}\subset\bigcup\{f(G(U)): U\in\xi'\}.$$

故 φ 是 ξ 的部分垫状加细. 证毕.

4.2.36　定理　Junnila[1978])　空间 X 是次仿紧的当且仅当 X 的每个开覆盖有 σ-垫状加细.

证　(→) 设 ξ 是次仿紧空间 X 的开覆盖. 则 ξ 有一个开的点星形加细序列 $\langle\eta_n\rangle$，每个 η_n 是 X 的开覆盖. $\forall n<\omega$，令

$$A_n=\{x\in X:\exists U\in\xi, St(x,\eta_n)\subset U\}.$$

则 $X=\bigcup_{n<\omega}A_n$，η_n 在 A_n 的每一点处点星形加细 ξ. 据引理4.2.34，ξ 有一个部分垫状加细 φ_n 覆盖 A_n. 则 $\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$ 是 ξ 的 σ 垫状加细.

(←) 设 ξ 是 X 的开覆盖. 由假设，X 有一个覆盖 $\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，每个 φ_n 是 ξ 的部分垫状加细. $\forall n<\omega$，令 $A_n=\bigcup\varphi_n$. 由引理4.2.34知，X 有一个半开覆盖 η_n，它在 A_n 的每一点处点星形加细 ξ. 因 $X=\bigcup_{n<\omega}A_n$. $\langle\eta_n\rangle$ 是 ξ 的半开的点星形加细序列. 据4.2.34，X 是次仿紧的. 证毕.

§4.3　狭义拟仿紧空间

为了同时推广次仿紧空间与亚紧空间，刘应明[1977]引入了狭义拟仿紧空间．证明了原来在上述两类空间中成立的一些重要结果，如 Michael-Nagami 定理，在这类更广泛的空间中也成立．近年来的研究表明，狭义拟仿紧性甚至严格地弱于次亚紧性．发现仿紧、次仿紧、亚紧和次亚紧性都可以分解成狭义拟仿紧性的因子．例如，一个空间是次亚紧的当且仅当它是狭义拟仿紧的和离散次亚可膨胀的．这表明可以用狭义拟仿紧空间统一刻画仿紧、次仿紧、亚紧和次亚紧空间，进一步显示出了这类新空间的理论价值．

我们在§3.2中已介绍过狭义拟仿紧空间的定义，即一个空间是狭义拟仿紧的，如果它的每个开覆盖有一个 σ-相对离散相对闭加细．

4.3.1　引理　设 ξ 是空间 X 的覆盖．若 $\forall n<\omega$，ξ 有一个 σ-相对离散相对闭的部分加细 $\varphi_n=\bigcup_{i<\omega}\varphi_{ni}$ 且 $\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$ 覆盖 X．则存在1-1满函数 $s:\omega\to\omega\times\omega$，使得 $\bigcup_{n<\omega}\varphi_{s(n)}$ 是 ξ 的 σ-相对离散相对闭的加细．

证　在 $\omega\times\omega$ 上定义一个良序 $\prec$ 如下：

$$\langle i,j\rangle\prec\langle m,n\rangle\leftrightarrow(i+j)<(m+n)\vee(i+j=m+n\wedge i<m).$$

$\forall n<\omega$，定义 $s(n)$ 是良序集 $\langle\omega\times\omega,\prec\rangle$ 中的第 n 个元，则 $s:\omega\to\omega\times\omega$ 是1-1满函数．$\bigcup_{n<\omega}\varphi_{s(n)}=\bigcup_{m,i<\omega}\varphi_{mi}=\bigcup_{m<\omega}\varphi_m$ 覆盖 X．

$\varphi_{s(0)}=\varphi_{00}$ 是 X 内的离散闭集族．$\forall k>0$，设 $s(k)=\langle m,n\rangle$，因 $\varphi_{mn}|(X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_{mi}))$ 是 $X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_{mi})$ 内的离散闭集族且 $\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_{mi})\subset\bigcup_{j<k}\varphi_{s(j)}$，故 $\varphi_{s(k)}|(X\setminus\bigcup_{j<k}(\bigcup\varphi_{s(j)}))$ 是子空间 $X\setminus\bigcup_{j<k}(\bigcup\varphi_{s(j)})$ 内的离

散闭集族，证毕．

4.3.2　引理　设$\{F_n: n<\omega\}$是空间X的可数闭覆盖，使得每个F_n是X的κ-狭义拟仿紧的子空间．则X是κ-狭义拟仿紧的．

证　设$\xi=\{U_\alpha: \alpha<\kappa\}$是$X$的开覆盖．$\forall n<\omega$，$F_n$的开覆盖$\xi|F_n$有一个在闭集$F_n$内的，从而是在$X$内的$\sigma$-相对离散相对闭加细$\varphi_n=\bigcup_{i<\omega}\varphi_{ni}$，显然$\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$覆盖$X$．据4.3.1，存在1-1满函数$s: \omega\to\omega\times\omega$，使得$\bigcup_{n<\omega}\varphi_{s(n)}$是$\xi$的$\sigma$-相对离散相对闭加细．$X$是$\kappa$-狭义拟仿紧的，证毕．

后面的例子表明狭义拟仿紧性不是遗传性质，但对F_σ-子空间是遗传的．

4.3.3　引理　κ-狭义拟仿紧空间的F_σ-子空间是κ-狭义拟仿紧的．

证　据4.3.2，只需证κ-狭义拟仿紧性对闭子空间遗传．设F是κ-狭义拟仿紧空间X的闭子空间且$\xi=\{U_\alpha: \alpha<\kappa\}$是$F$的开覆盖，$\forall\alpha<\kappa$ $\exists V_\alpha$开于X，使得$U_\alpha=V_\alpha\cap F$．则$\eta=\{V_\alpha: \alpha<\kappa\}\cup\{X\setminus F\}$是$X$的开覆盖，从而有一个$\sigma$-相对离散相对闭加细$\bigcup_{n<\omega}\delta_n$．令$\varphi_n=\{P\in\delta_n: P\cap F\neq\varnothing\}$，则$\bigcup_{n<\omega}(\varphi_n|F)$是$\xi$在$F$内的$\sigma$-相对离散相对闭加细．$F$是$\kappa$-狭义拟仿紧的，证毕．

4.3.4　引理(刘[1977])　设$\xi=\{U_s: s\in S\}$是空间X的点有限开覆盖，则ξ有σ-相对离散相对闭加细．

证　$\forall n<\omega$，$B\in[S]^{n+1}$，令

$$U(B)=\bigcap\{U_s: s\in B\}, P(n,B)=A_n\cap U(B),$$

其中$A_n=\{x\in X: |(\xi)_x|\leqslant n+1\}$，再令

$$\varphi_n=\{P(n,B): B\in[S]^{n+1}\}.$$

不妨设$s\neq t$时$U_s\neq U_t$．现证$\varphi=\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$是$\xi$的合引理条件的加细．事实上，显然有

$$x \in \bigcup \varphi_n \leftrightarrow |(\xi)x| = n + 1. \tag{1}$$

$$x \in X \setminus \bigcup_{i<n} (\bigcup \varphi_i) \leftrightarrow |(\xi)_x| \geqslant n + 1 \tag{2}$$

下证

$$\forall B, D \in [S]^{n+1}, 若 B \neq D, 则 U(B) \cap P(n, D) = \varnothing, \tag{3}$$

事实上，$\exists s \in B \setminus D$, $\forall x \in P(n, D)$, $|(\xi)_x| = n+1$ 且 $x \in U(D)$, $|D| = n+1$，故 $x \notin U_s \supset U(B)$，(3)真.

$$\varphi 是 \sigma\text{-} 相对离散相对闭的. \tag{4}$$

设 $n < \omega$. $\forall x \in X \setminus \bigcup_{i<n} (\bigcup \varphi_i)$. 由(2)知，$|(\xi)_x| \geqslant n+1$. 则$\exists B \in [S]^{n+1}$, $x \in U(B) \in N(x)$. $\forall D \in [S]^{n+1} \setminus \{B\}$，由(3)知，

$$U(B) \cap P(n, D) = \varnothing.$$

故 $\varphi_n | (X \setminus \bigcup_{i<n} (\bigcup \varphi_i))$ 在 $X \setminus \bigcup_{i<n} (\bigcup \varphi_i)$ 内是离散的. 其次，设 $n < \omega$, $B \in [S]^{n+1}$，令

$$C(n, B) = X \setminus \bigcup \{U(D) : D \in ([S]^{n+1} \setminus \{B\}) \cup \bigcup_{k > n+1} [S]^k\}.$$

则 $C(n, B)$ 是闭集，且易知，

$$P(n, B) = C(n, B) \setminus \bigcup_{i<n} (\bigcup \varphi_i).$$

从而(4)真. $\varphi = \bigcup_{n<\omega} \varphi_n$，显然是 X 的覆盖，证毕.

下列结果是朱俊[1984]与龙冰[1986]独立地得到的.

4.3.5　定理　κ-次亚紧空间是 κ-狭义拟仿紧的.

证　设 $\xi = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是 κ-次亚紧空间 X 的开覆盖. 据4.2.2，X 有可数闭覆盖 $\{F_n : n < \omega\}$，使得$\forall n < \omega$, $\xi | F_n$ 在子空间 F_n 内有点有限开加细 η_n. 据4.3.4，η_n 在 F_n 内从而在 X 内有 σ-相对离散相对闭加细 $\varphi_n = \bigcup_{i<n} \varphi_{ni}$. 显然，$\bigcup_{n<\omega} \varphi_n$ 覆盖 X. 据4.3.1，存在1-1满函数 $s : \omega \to \omega \times \omega$，使得 $\bigcup_{n<\omega} \varphi_{s(n)}$ 是 ξ 的 σ-相对离散相对闭加细，X 是 κ-狭义拟仿紧的，证毕.

下面的例子取自 Burke[1984]

4.3.6 例 存在T_2局部紧的狭义拟仿紧空间$\Psi(\omega_1)$，它不是ω_1-次亚紧的.

设基数$\kappa\geqslant\omega$，κ的子集族η称为**几乎互不相交的**，如果

$$\forall A,B\in\eta\,(A\neq B\rightarrow|A\cap B|<\omega).$$

令

$P=\{\eta:\eta\subset[\kappa]^{\omega},\eta$是几乎互不相交的无限族$\}$. 则偏序集$\langle P,\subset\rangle$有一个极大元$\xi(\kappa)$. 易知，$\xi(\kappa)$不可数且覆盖$\kappa$. 令$\Psi(\kappa)=\xi(\kappa)\cup\kappa$. $\forall x\in\Psi(\kappa)$，定义

$$\zeta(x)=\begin{cases}\{\{x\}\}, & \text{当 } x\in\kappa \text{ 时},\\ \{\{x\}\cup(x\setminus F):F\in[\kappa]^{<\omega}\}, & \text{当 } x\in\xi(\kappa)\text{时}.\end{cases}$$

在$\Psi(\kappa)$上赋予以$\zeta(x)$为x的邻域基所生成的拓扑. 易见，空间$\Psi(\kappa)$是T_2的. $\forall x\in\xi(\kappa)$，$F\in[\kappa]^{<\omega}$，$\{x\}\cup(x\setminus F)$是x的紧邻域，从而$\Psi(\kappa)$是局部紧的，据Burke[1984]例4.5，$\Psi(\omega_1)$的开覆盖$\{\{x\}\cup\omega:x\in\xi(\omega_1)\}$没有开的$\theta$-加细序列，$\Psi(\omega_1)$不是$\omega_1$-次亚紧的. 现证它是狭义拟仿紧的. 为此，设$\delta$是$\Psi(\omega_1)$的任一开覆盖. 令

$$\varphi_0=\{\{x\}:x\in\xi(\omega_1)\},\varphi_1=\{\{\alpha\}:\alpha<\omega_1\}$$

$\forall n\geqslant2$，$\varphi_n=\{\varnothing\}$，则$\bigcup\limits_{n<\omega}\varphi_n$是$\delta$的$\sigma$-相对离散相对闭加细. $\Psi(\omega_1)$是狭义拟仿紧的，证毕.

4.3.7 定义(Bennet and Lutzer[1972]) (Ⅰ)设$\kappa\geqslant\omega$，空间X是**κ-弱次亚紧的**(或**κ-弱θ-可加细的**)，如果X的每个势$\leqslant\kappa$的开覆盖有一个开加细$\bigcup\limits_{n<\omega}\eta_n$，使得$\forall x\in X\ \exists n(x)<\omega$，$0<|(\eta_{n(x)})_x|<\omega$.

(Ⅱ)空间X是**弱次亚紧的**，如果$\forall\kappa\geqslant\omega$，$X$是$\kappa$-弱次亚紧的.

4.3.8 定理 对任意空间X，下列各条等价：

(Ⅰ) X是κ-弱次亚紧的；

(Ⅱ) X的每个势$\leqslant\kappa$的开覆盖有一个加细$\bigcup\limits_{n<\omega}\varphi_n$，使得每个$\varphi_n$是子空间$\bigcup\varphi_n$内的离散闭集族；

(Ⅲ) X 的每个势$\leqslant\kappa$的开覆盖有一个开加细 $\bigcup_{n<\omega}\eta_n$，使得$\forall x\in X\ \exists n(x)<\omega$，$|(\eta_{n(x)})_x|=1$.

证 (Ⅰ)→(Ⅱ) 设ξ是X的势$\leqslant\kappa$的开覆盖. 由假设(Ⅰ)，ξ有开加细$\bigcup_{n<\omega}\eta_n$，使得$\forall x\in X\ \exists n<\omega$，$0<|(\eta_n)_x|<\omega$. $\forall n,k<\omega$，令

$$H_{nk}=\{x\in X:|(\eta_n)_x|=k+1\},$$

$$\varphi_{nk}=\{H_{nk}\cap(\bigcap(\eta_n)_x):x\in H_{nk}\}.$$

则易知，φ_{nk}是H_{nk}内的离散闭集族. 因$\bigcup\varphi_{nk}=H_{nk}$，则 $\bigcup_{n,k<\omega}\varphi_{nk}$是$\xi$的合要求的加细.

(Ⅱ)→(Ⅲ) 设ξ是X的势$\leqslant\kappa$的开覆盖. 由假设(Ⅱ)，ξ有一个加细$\varphi=\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，使得每个$\varphi_n$是$\bigcup\varphi_n$内的离散闭集族. $\forall F\in$ $\exists U(F)\in\xi$，$F\subset U(F)$. $\forall n<\omega\forall F\in\varphi_n\forall x\in F\ \exists V(n,F,x)\in N(x)$至多与$\varphi_n$的一个元相交. 则$V(n,F)=\bigcup\{V(n,F,x):x\in F\}$是包含$F$的开集，$\forall n<\omega$，令

$$\eta_n=\{V(n,F)\cap U(F):F\in\varphi_n\}.$$

则η_n是开集族且$\bigcup\eta_n\supset\bigcup\varphi_n$，从而$\bigcup_{n<\omega}\eta_n$是$\xi$的开加细. 易知，$\forall x\in X$ $\exists n<\omega$，$|(\eta_n)_x|=1$.

(Ⅲ)→(Ⅰ)显然. 证毕.

4.3.9 系 κ-狭义拟仿紧空间是κ-弱次亚紧的.

证 设ξ是κ-狭义拟仿紧空间X的势$\leqslant\kappa$的开覆盖. 则ξ有一个加细$\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，使得每个$\varphi_n$是$X\setminus\bigcup_{i<n}(\bigcup\varphi_i)$内离散闭集族. 则$\varphi_n$也是$\bigcup\varphi_n$内的离散闭集族. X是κ-弱次亚紧的. 证毕.

4.3.10 引理 κ-弱次亚紧的完全空间是κ-次仿紧的.

证 设X是κ-弱次亚紧的完全空间. ξ是X的势$\leqslant\kappa$的开覆盖. 则ξ有一个开加细$\eta=\bigcup_{n<\omega}\eta_n$，使得$\forall x\in X\ \exists n<\omega$，$|(\eta_n)_x|=1$，因$X$是完全的，设$\bigcup\eta_n=\bigcup_{k<\omega}$，每个$C_{nk}$闭于$X$，$\forall x\in X\ \exists U_x\in\xi$，$x\in U_x$，

$\forall n, k<\omega$，令

$$\varphi_{nk} = \eta_n \cup \{U_x \setminus C_{nk}: x \in X_{nk}\}.$$

则 φ_{nk} 是 ξ 的开加细. 只需再证

$$\langle \varphi_{nk} \rangle_{n,k<\omega} \text{ 是 } \xi \text{ 的点星形加细序列.} \qquad (1)$$

事实上，$\forall V \in \eta\ \exists\ U(V) \in \xi$，$V \subset U(V)$，设 $x \in X$，则 $\exists n<\omega\ \exists V \in \eta_n$，使得 $x \in V \subset \bigcup \eta_n$. $\exists k<\omega$，$x \in C_{nk}$. 则

$$\mathrm{St}(x, \varphi_{nk}) = V \subset U(V)$$

(1)真，证毕.

4.3.11　系　设 X 是完全空间，则下列各条等价：

（Ⅰ）　X 是 κ-次仿紧的；

（Ⅱ）　X 是 κ-次亚紧的；

（Ⅲ）　X 是 κ-狭义拟仿紧的；

（Ⅳ）　X 是 κ-弱次亚紧的.

4.3.12　定义　（Ⅰ）　设 $\kappa \geqslant \omega$，空间 X 是 **κ-亚可膨胀的**（**κ-离散亚可膨胀的**），如果对 X 内每个局部有限（离散）闭集族 $\{F_\alpha : \alpha<\kappa\}$，$X$ 内有点有限开集族 $\{U_\alpha : \alpha<\kappa\}$，使得 $\forall \alpha<\kappa$，$F_\alpha \subset U_\alpha$.

（Ⅱ）　空间 X 是**亚可膨胀的**（**离散亚可膨胀的**），如果 $\forall \kappa \geqslant \omega$，$X$ 是 κ-亚可膨胀的（κ-离散亚可膨胀的）.

ω-亚可膨胀空间又称为**可数亚可膨胀空间**.

（离散）亚可膨胀空间是 Smith 和 Krajewski[1971]中引入的，原来称为（离散）几乎**可膨胀空间**.

4.3.13　引理　κ-亚紧空间是 κ-亚可膨胀的.

4.3.14　定理　设 $\kappa \geqslant \omega$，则空间 X 是 κ-亚紧的当且仅当它是 κ-离散亚可膨胀的和 κ-狭义拟仿紧.

证　（$\rightarrow$）由4.3.13知.

（$\leftarrow$）设 X 是 κ-离散亚可膨胀的 κ-狭义拟仿紧空间且 $\xi = \{U_\alpha :$

$\alpha<\kappa\}$是 X 的开覆盖，则 ξ 有一个 σ-相对离散相对闭加细 $\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$，不妨设每个 $\varphi_n=\{F_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}$且 $F_{n\alpha}\subset U_\alpha$. 先证

论断1 $\forall n<\omega$，X 有开集族 η_n 合下列条件：

(a) η_n 部分加细 ξ；

(b) $\eta_n=\{V_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}$是点有限的；

(c) $\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\varphi_i)\subset\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\eta_i)$；

(d) $\forall n\in N$，$(\bigcup\eta_n)\cap\bigcup_{i=0}^{n-1}(\bigcup\varphi_i)=\varnothing$；

证 对 $n<\omega$ 用归纳法. $\varphi_0=\{F_{0\alpha}:\alpha<\kappa\}$是 X 内的离散闭集族，X 内有点有限的开集族. $\eta_0=\{V_{0\alpha}:\alpha<\kappa\}$，使得 $F_{0\alpha}\subset V_{0\alpha}$，$\bigcup\varphi_0\subset\bigcup\eta_0$. 不妨设 $V_{0\alpha}\subset U_\alpha$.

现设 $n\geqslant 0$，且设 $\eta_0,\cdots,\eta_n$ 已构成，合条件(a)—(d). 由归纳法假设(c)，有

$$X\setminus\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\eta_i)\subset X\setminus\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\varphi_i).$$

于是 $\varphi_{n+1}|(X\setminus\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\eta_i))$是闭子空间 $X\setminus\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\eta_i)$内的离散闭集族. X 内有点有限开集族$\{D_{n+1,\alpha}:\alpha<\kappa\}$，使得

$$F_{n+1,\alpha}\setminus\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\eta_i)\subset D_{n+1,\alpha}.$$

令

$$V_{n+1,\alpha}=D_{n+1,\alpha}\cap(U_\alpha\setminus\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\varphi_i)).$$

则 $F_{n+1,\alpha}\setminus\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\eta_i)\subset V_{n+1,\alpha}$. $\eta_{n+1}=\{V_{n+1,\alpha}:\alpha<\kappa\}$是 ξ 的点有限的部分加细.

$$\bigcup\varphi_{n+1}\setminus\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\eta_i)\subset\bigcup n+1\subset X\setminus\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\varphi_i)\text{，则}$$

$$(\bigcup\eta_{n+1})\cap\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\varphi_i)=\varnothing$$

$$\bigcup_{i=0}^{n+1}(\bigcup\varphi_i)\subset\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\eta_i)\cup[\bigcup\varphi_{n+1}\setminus\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\eta_i)]\subset\bigcup_{i=0}^{n+1}(\bigcup\eta_i)$$

于是 η_{n+1} 满足条件 (a)—(d). 归纳法完成，论断1真.

由 (a)，(c) 知，$\eta=\bigcup_{n<\omega}\eta_n$ 是 ξ 的开加细. $\forall x\in X$ $\exists n<\omega$，$x\in\bigcup\varphi_n$，$\forall k\geqslant n$，$x\in\bigcup_{i=0}^{k}(\bigcup\varphi_i)$，由 (d) 知，$x\notin\bigcup\eta_{k+1}$，$\forall k\leqslant n$，η_k 是点有限的，故 η 在 x 处是点有限的，X 是 κ-亚紧的. 证毕.

4.3.15　系　空间 X 是 κ-亚紧的当且仅当它是 κ-离散亚可膨胀的和 κ-次亚紧的.

4.3.16　系　(朱[1984]，龙[1986])空间 X 亚紧的当且仅当它是离散亚可膨胀的和狭义拟仿紧的.

4.3.17　系　(Boone[1972])空间 X 是亚紧的当且仅当它是离散亚可膨胀的和次亚紧的.

4.3.18　定理　空间 X 是 κ-亚紧的当且仅当它是 κ-亚可膨胀的且具有性质 κ-b_1

证　证法与前面的定理4.3.14同.

4.3.19　系　空间 X 是亚紧的当且仅当它是亚可膨胀的且具有性质 b_1.

据 Smith[1980]中说，Chaber 在他的一篇未发表的论文中曾得到上面的系，自然其证明也未公布.

4.3.20　定理(刘[1977])　空间 X 是 T_2 仿紧的当且仅当它是 T_1 集体正规和狭义拟仿紧的.

证　(→)显然.

(←)设 X 是 T_1 集体正规的狭义拟仿紧空间，则 X 是离散可膨胀的，于是 X 是亚紧的. 由4.1.17知，X 是仿紧的. 证毕.

4.3.21　系(Worrel Iande Wick[1965])　空间 X 是 T_2 仿紧的当且仅当它是 T_1 集体正规和次亚紧的.

4.3.22　系(Burke[1969])　空间 X 是 T_2 仿紧的当且仅当它

是 T_1 集体正规和次仿紧的.

4.3.23　例　狭义拟仿紧性不是遗传性质.

证　序数空间 ω_1+1 是紧的从而是狭义拟仿紧的. 另一方面,它的子空间 ω_1 是 T_2 集体正规非仿紧的. 由上一定理知,它不是狭义拟仿紧的,证毕.

4.3.24　定理　空间 X 是 κ-次亚紧的当且仅当它是 κ-离散次亚可膨胀的和 κ-狭义拟仿紧的.

证　($\rightarrow$)由4.2.31及4.3.5知.

($\leftarrow$)设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是空间 X 的开覆盖. 由假设,ξ 有一个 σ-相对离散相对闭加细 $\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$. 不妨假设每个 $\varphi_n=\{F_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}$ 且 $F_{n\alpha}\subset U_\alpha$. 下证

论断1　$\forall n<\omega\forall s\in\omega^n$,$X$ 有开集族 $\eta(s)$ 满足下列各条件:

(a)　$\eta(s)=\{V(s,\alpha):\alpha<\kappa\}$ 且 $V(s,\alpha)\subset U_\alpha$;

(b)　$\forall n\in N,s\in\omega^n$,$\bigcup_{i=0}^{n-1}(\bigcup\varphi_i)\subset\bigcup_{i=0}^{n-1}(\bigcup\eta(s|(i+1)))$;

(c)　$\forall n\in N,t\in\omega^{n+1}$,$(\bigcup\eta(t))\cap\bigcup_{i=0}^{n-1}(\bigcup\varphi_i)=\varnothing$;

(d)　$\forall x\in X,\forall n<\omega,\forall s\in\omega^n$,$\exists t_n(x)<\omega$,使得 $\eta(s\frown t_n(x))$ 在 x 是点有限的.

证　对 $n<\omega$ 用归纳法. $n=0$ 时,$\forall\alpha<\kappa$,令 $V(\varnothing,\alpha)=\varnothing$. $n=1$ 时,因 $\varphi_0=\{F_{0\alpha}:\alpha<\kappa\}$ 是 X 内离散闭集族,由假设,X 内有一列开集族 $\langle\eta(t_0)\rangle_{t_0<\omega}$,使得每个 $\eta(t_0)=\{V(t_0,\alpha):\alpha<\kappa\}$,$F_{0\alpha}\subset V(t_0,\alpha)$,且 $\forall x\in X$ $\exists t_0(x)<\omega$,使得 $\eta(t_0(x))$ 在 x 是点有限的. 不妨假设 $V(t_0,\alpha)\subset U_\alpha$.

现设 $n\geqslant1$ 且设 $\forall s\in\bigcup_{i=0}^{n}\omega^i$,已构成满足条件(a)—(d)的开集族 $\eta(s)$,由归纳法假设,$\forall s\in\omega^n$,

$$\bigcup_{i=0}^{n-1}(\bigcup\varphi_i)\subset\bigcup_{i=0}^{n-1}\bigcup\eta(s|(i+1))\tag{1}$$

于是 $\varphi_n|(X\setminus\bigcup_{i=0}^{n-1}\bigcup\eta(s|(i+1)))$ 是闭子空间 $X\setminus\bigcup_{i=0}^{n-1}\bigcup\eta(s|(i+1))$ 内的离散闭集族. 因 X 是 κ-离散次亚可膨胀的, X 有一列开集族 $\langle\delta(s\hat{+}t_n)=\{D(s\hat{+}t_n,\alpha):\alpha<\kappa\}\rangle_{t_n<\omega}$, 使得 $\forall t_n<\omega$.

$$F_{n\alpha}\setminus\bigcup_{i=0}^{n-1}\bigcup\eta(s|(i+1))\subset D(s\hat{+}t_n,\alpha)$$

且 $\forall x\in X\ \exists t_n(x)<\omega$, 使得 $\delta(s\hat{+}t_n(x))$ 在 x 是点有限的. $\forall\alpha<\kappa$, 令

$$V(s\hat{+}t_n,\alpha)=D(s\hat{+}t_n,\alpha)\cap(U_\alpha\setminus\bigcup_{i=0}^{n-1}(\bigcup\varphi_i))\tag{2}$$

$$\eta(s\hat{+}t_n)=\{V(s\hat{+}t_n,\alpha):\alpha<\kappa\}$$

显然, $\eta(s\hat{+}t_n)$ 满足条件 (a), $\forall t\in\omega^{n+1}\ \exists s\in\omega^n\ \exists t_n<\omega$, 使得 $t=s\hat{+}t_n$. 因为

$$F_{n\alpha}\setminus\bigcup_{i=0}^{n-1}\bigcup\eta(s|(i+1))\subset V(s\hat{+}t_n,\alpha)$$

由(1)知,

$$\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\varphi_i)\subset(\bigcup_{i=0}^{n-1}\bigcup\eta(s|(i+1)))\cup(\bigcup\varphi_n\setminus\bigcup_{i=0}^{n-1}\bigcup\eta(s|(i+1))$$

$$\subset\bigcup_{i=0}^{n}\bigcup\eta(t|(i+1))$$

条件 (b) 真. (c) 由(2)知. (d) 显然真. 于是对 $\forall t\in\omega^{n+1}$ 构成了满足要求的 $\eta(t)$. 由归纳法知, 论断1真.

$\forall t\in\omega^\omega$, $\zeta(t)=\bigcup_{n<\omega}\eta(t|n)$ 是 ξ 的开加细. $\forall i,n<\omega$, 令

$$T_{in}=\{s\in\omega^\omega:\forall k>n\ (s(k)=i)\}.$$

则 $T=\bigcup\{T_{in}:i,n<\omega\}$ 是可数的. 为证 X 是 κ-次亚次紧的, 只需证

$$\{\zeta(t):t\in T\}\text{ 是 }\xi\text{ 的开的 }\sigma\text{- 加细序列.}\tag{3}$$

设 $x\in X$, 则 $\exists n<\omega$, $x\in\bigcup\varphi_n$. 据 (d), $\exists s(x)=\langle t_0(x),\cdots,t_n(x)\rangle\in\omega^{n+1}$, 使得 $\forall i=0,\cdots,n-1$, $\eta(s(x)|(i+1))$ 在 x 是点有限的. $\forall k>n$, 令 $t_k(x)=t_n(x)$. 则 $t(x)=\langle t_0(x),t_1(x),\cdots\rangle\in T$. 由 (c) 知, $\forall k\geqslant n$, $x\notin\bigcup\eta(t_0(x),\cdots,t_{k+1}(x))$. 故 $\zeta(t(x))$ 在 x 是点有限的, (3)真. 证毕.

4.3.25　系(Jiang[1988])　空间 X 是次亚紧的当且仅当它

是离散次亚可膨胀的和狭义拟仿紧的.

4.3.26　系　空间 X 是次仿紧的当且仅当它是集体次正规的和狭义拟仿紧的.

证　因集体次正规空间是离散次亚可膨胀的，由4.2.29知.

用与4.3.24相同的证法可得下列结果.

4.3.27　定理　空间 X 是 κ-次亚紧的当且仅当它是 κ-次亚可膨胀的且具有性质 $\kappa-b1$.

4.3.28　系　空间 X 是次亚紧的当且仅当它是次亚可膨胀的具有性质 b_1.

Smith[1980]中也提到 Chaber 中他的一篇未发表的论文中曾得到上面这个系.

4.3.29　定义　设基数 $\kappa\geqq\omega$. 空间 X 是**初始 κ-紧的**，如果 X 的每个势 $\leqq\kappa$ 的开覆盖有有限子复盖. 初始 ω—紧空间又叫**可数紧空间**.

4.3.30　定理　空间 X 是初始 κ-紧的当且仅当它是可数紧的和 κ-狭义拟仿紧的.

证　($\rightarrow$)显然.

($\leftarrow$)设 X 可数紧的 κ-狭义拟仿紧空间且 ξ 是 X 的势 $\leqq\kappa$ 的开覆盖，则 ξ 有一个 σ-相对离散相对闭加细 $\bigcup_{n<\omega}\varphi_n$. 用归纳法易知，$\forall n<\omega$，$\xi$ 有有限子族 ξ_n，使得 $\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\varphi_i)\subset\bigcup_{i=0}^{n}(\bigcup\xi_i)$. 于是 $\bigcup_{n<\omega}\xi_n$ 是 X 的可数开覆盖，从而它有有限子覆盖. X 是初始 κ-紧的. 证毕.

§4.4　再论仿紧空间的刻画

在介绍了次亚紧和狭义拟仿紧空间的基本性质之后，我们就有可能来介绍仿紧空间若干新的有趣的刻画.

4.4.1　定理　空间 X 是 κ-仿紧的当且仅当它是 κ-可膨胀的和具有性质 κ-b_1.

证　必要性是显然的，充分性由3.3.26知. 证毕.

4.4.2　系　（Ⅰ）空间 X 是 κ-仿紧的当且仅当它是 κ-可膨胀的和 K-狭义似仿紧的.

（Ⅱ）空间 X 是 κ-仿紧的当且仅当它是 κ-可膨胀的和 κ-次亚紧的.

4.4.3　系　(Krajewski[1971])空间 X 是仿紧的当且仅当它是可膨胀的和次亚紧的.

4.4.4　系　κ-仿紧空间在闭的双商映射下的像是 K-仿紧的.

证　由3.3.32及4.4.2(Ⅱ)知. 证毕.

闭映射不能保持 T_1-仿紧性的例子可见林[1988]. 我们在§2.3中已介绍过局部 θ-加细序列的概念. 下列结果由有关的定义直接知.

4.4.5　引理　设 ξ，$\eta_n(n<\omega)$是空间 X 的覆盖.

（Ⅰ）　若$\langle\eta_n\rangle$是 ξ 的局部 θ-加细序列. 则$\langle\eta_n\rangle$是 ξ 的局部 W-加细序列.

（Ⅱ）　若$\langle\eta_n\rangle$是 ξ 的局部 W-加细序列. 则$\langle\eta_n\rangle$是 ξ 的点星形 F-加细序列.

4.4.6　定理　对任意空间 X，下列各条等价：

（Ⅰ）　X 是 κ-仿紧的；

（Ⅱ）　X 的每个势$\leqslant\kappa$ 的开覆盖有开的局部 θ-加细序列；

（Ⅲ）　X 的每个势$\leqslant\kappa$ 的开覆盖有半开的局部 θ-加细序列；

（Ⅳ）　X 的每个势$\leqslant\kappa$ 的开覆盖有半开的局部 W-加细序列.

证　（Ⅰ）→（Ⅱ）与（Ⅱ）→（Ⅲ），显然.（Ⅲ）→（Ⅳ）由前一引理知.

（Ⅳ）→（Ⅰ）. 由假设（Ⅳ）及4.2.4知，X 是 κ-次亚紧的. 据4.4.2，只需证 X 是 κ-可膨胀的，也只需证它是 κ-θ-可膨胀的. 设$\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是 X 内的局部有限闭集族. $\forall s\in[\kappa]^{<\omega}$，令 $U_s=X\setminus\bigcup\{F_\alpha:\alpha\notin S\}$. 则$\{U_s:s\in[\kappa]^{<\omega}\}$是 X 的势$\leqslant\kappa$ 的开覆盖. 据假设（Ⅳ），它有一个半开的局部 W-加细序列$\langle\eta_n\rangle$. 令

$$W_{n\alpha}=(\mathrm{St}(F_\alpha,\eta_n))^\circ,n<\omega,\alpha<\kappa.$$

则 $F_\alpha\subset W_{n\alpha}$. 令 $\varphi_n=\{W_{n\alpha}:\alpha<\kappa\}$. $\forall x\in X\ \exists n<\omega\ \exists G\in N(x)\exists s_0,\cdots,s_k\in[\kappa]^{<\omega}$，使得$(\eta_n)_G$ 部分加细$\{U_{s_0},\cdots,U_{s_k}\}$. 则

$$(\varphi_n)_G\subset\{W_{n\alpha}:\alpha\in s_0\cup\cdots\cup s_k\}.$$

于是$(\varphi_n)_G$ 有限，X 是 κ-θ-可膨胀的. 证毕.

4.4.7　系　（Jiang[1987]）（Ⅰ）　空间 X 是仿紧的当且仅当它的每个开覆盖有半开的局部 W-加细序列.

（Ⅱ）　空间 X 是仿紧的当且仅当它的每个开覆盖有半开的局部 W-加细.

4.4.8　系　（Worrell[1968]）　空间 X 是仿紧的当且仅当它的每个开覆盖有开的局部 W-加细.

4.4.9　定理　一个正则空间 X 是仿紧的当且仅当 X 的每个开覆盖有一列开加细$\langle\eta_n\rangle$，使得$\forall x\in X\ \exists n<\omega\ \exists G\in N(x)(|(\eta_n)_G|=1)$.

证　由2.2.35及2.2.11知. 证毕.

4.4.10　定理　空间 X 是 κ-仿紧的当且仅当 X 的每个 $\leqslant\kappa$ 的良序开覆盖有开的局部 θ-加细序列.

证　($\rightarrow$)显然.

($\leftarrow$)对任意基数 $\lambda\leqslant\kappa$，让 $P(\lambda)$ 表命题："X 的每个势 $\leqslant\lambda$ 的开覆盖有开的局部 W-加细序列."我们用超限归纳法来证明 $\forall\lambda\leqslant\kappa$，$P(\lambda)$ 成立. 特别地，$P(\kappa)$ 成立. 于是由 4.4.6 知 X 是 κ-仿紧的. 当 λ 有限时，$P(\lambda)$ 显然成立. 现设 $\omega\leqslant\lambda\leqslant\kappa$ 且设 $\forall$ 基数 $\mu<\lambda$，$P(\mu)$ 成立. 下面系证 $P(\lambda)$ 成立.

设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\lambda\}$ 是 X 的开覆盖. 令 $G_\alpha=\bigcup_{\beta\leqslant\alpha}U_\beta$，则 $\{G_\alpha:\alpha<\lambda\}$ 是 X 的势 $\leqslant\lambda\leqslant\kappa$ 的良序开覆盖. 由定理假设它有开的局部 θ-加细序列 $\langle\eta_n\rangle$. 不妨设 $\eta_n=\{V(n,\alpha):\alpha<\lambda\}$ 且 $V(n,\alpha)\subset G_\alpha$. 令

$$\xi(n,\alpha)=\{U_\beta:\beta\leqslant\alpha\}\cup\{\bigcup_{\beta>\alpha}V(n,\beta)\},n<\omega,\alpha<\lambda.$$

它是 X 的开覆盖且 $|\xi(n,\alpha)|<\lambda$. 由归纳法假设它有开的局部 W-加细序列 $\langle\varphi_k(n,\alpha)\rangle_{k<\omega}$. 令

$$F_{nk}=\{x\in X:|(\eta_n)_x|\leqslant k+1\},n,k<\omega.$$

它是闭集. $\forall x\in\bigcup_{k<\omega}F_{nk}$，让 $\alpha(x,n)$ 表有限集 $\{\alpha<\lambda:x\in V(n,\alpha)\}$ 的最大元. $\forall i\leqslant k$，取 $W_i(n,x)\in(\varphi_i(n,\alpha(x,n)))_x$. 令

$$O(n,k,x)=V(n,d(x,n))\cap\bigcap_{i=0}^{k}W_i(n,x).$$

$$\gamma_{nk}=\{O(n,k,x):x\in F_{nk}\}\cup\{X\backslash F_{nk}\}.$$

每个 γ_{nk} 是 X 的开覆盖. F 证 $(\gamma_{nk})_{n,k<\omega}$ 是 ξ 的开的局部 W-加细序列. 从而完成了 $P(\lambda)$ 的证明，定理即得证.

设 $x\in X$，则 $\exists n<\omega$ $\exists H\in N(x)$，使得

$$(\eta_n)_H=\{V(n,\alpha_0),\cdots,V(n,\alpha_t)\}\text{ 有限.}$$

于是 $x\in F_{nh}$. $\forall i\leqslant h$ $\exists k(i)<\omega$ $\exists W_i\in N(x)\exists$ 有限的 $\xi_i\subset\xi(n,\alpha_i)$，使得 $(\varphi_{k(i)}(m,d_i))_{W_i}$ 部分加细 ξ_i. 令 $\xi'=\bigcup_{i=0}^{h}(\xi_i\cap\xi)$，$k=\max\{h,k(0),\cdots,$

$k(h)\}$. $W=H\cap W_0\cap\cdots\cap W_k$. 则 $W\in N(x)$，只需再证

$$(\gamma_{nk})_W \text{ 部分加细 } \xi'. \qquad (1)$$

设 $G\in(\gamma_{nk})_W$，则 $G\in\gamma_{nk}$ 且 $G\cap W\neq\varphi$. $\forall p\in W$，$|(\eta_n)_p|\leqslant|(\eta)_H|\leqslant k+1$. 则 $W\cap(X\setminus F_{nk})=\varnothing$. 于是 $\exists y\in F_{nk}$，使得 $G=O(n,k,y)$. 因

$$\varnothing\neq G\cap W\subset V(n,\alpha(y,n))\cap H,$$

$\exists i\leqslant h$, $\alpha(y,n)=\alpha_i$. 因 $k(i)\leqslant k$,

$$\varnothing\neq G\cap W\subset W_{k(i)}(n,y)\cap W_i.$$

则 $\exists U\in\xi_i$, $W_{k(i)}(n,y)\subset U$. $y\in O(n,k,y)\subset U\in\xi(n,\alpha_i)$ 且由 $\alpha(y,n)=\alpha_i$ 的定义知，$y\notin\bigcup_{\beta>\alpha_i}V(n,\beta)$. 故 $U\neq\bigcup_{\beta>\alpha_i}V(n,\beta)$. 于是 $U\in\xi$, $G\subset U\in\xi'$. (1)真. 证毕.

4.4.11　系　(Jiang[1989])空间 X 是仿紧的当且仅当它的每个良序开覆盖有开的局部 θ-加细序列.

4.4.12　系　(Mack[1967])空间 X 是 κ-仿紧的当且仅当 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的良序开覆盖有局部有限开加细.

4.4.13　定义　设 $\xi,\eta,\eta_n(n<\omega)$ 是空间 X 的覆盖.

(Ⅰ)　η 是 ξ 在点 $x\in X$ 的**局部星形 F^*-加细序列**，如 $\exists U\in N(x)\exists$ 有限的 $\xi'\subset\xi$，使得

$$\forall G\in N(x)(G\subset U\rightarrow \mathrm{St}(G,\eta)\subset\mathrm{St}(G,\xi')).$$

(Ⅱ)　η 是 ξ 的**局部星形 F^*-加细**，如果 $\forall x\in X$，η 是 ξ 在点 x 的局部星形 F^*-加细.

(Ⅲ)　(η_n) 是 ξ 的**局部星形 F^*-加细序列**，如果 $\forall x\in X$ $\exists n(x)<\omega$，$\eta_{n(x)}$ 是 ξ 在 x 的局部星形 F^*-加细.

4.4.14　定理　(Jiang[1987])空间 X 是 κ-仿紧的当且仅当它的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖有一个半开的局部星形 F^*-加细序列.

证　必要性是显然的.

充分性：　设 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 的开覆盖. 只需证明下列两

个论断.

论断1 $\forall s\in\omega^{<\omega}$，$\xi$ 有开加细 $\eta(s)=\{V(s,\alpha):\alpha<\kappa\cdot 2\}$ 满足下列条件：

(a) $\forall\alpha<\kappa$，$V(s,\alpha)\subset U_\alpha$，$V(s,k+\alpha)\subset U_\alpha$.

特别地，当 $s=\varnothing\in\omega^0$ 时，$\forall\alpha<\kappa$，$V(\varnothing,\alpha)=\varnothing$；

(b) $\eta(s)$ 有半开的局部星形 F^*-加细序列 $\langle\varphi_{s\hat{+}k}\rangle_{k=0}^{\infty}$ 使得 $\forall\alpha<\kappa$，$k<\omega$，有

$$V(s\hat{+}k,\alpha)=U_\alpha\cap\Big[V(s,\alpha)\cup\big(\mathrm{St}(X\setminus\bigcup_{\beta\neq\kappa+\alpha}V(s,\beta),\varphi_{s\hat{+}k})\big)^\circ\Big],\tag{1}$$

$$V(s\hat{+}k,\kappa+\alpha)=U_\alpha\cap\Big(\bigcup_{\beta>\kappa+\alpha}V(s,\beta)\Big)\cap\big(\mathrm{St}(X\setminus\bigcup_{\beta<\kappa+\alpha}V(s,\beta),\varphi_{s\hat{+}k})\big)^\circ\Big].\tag{2}$$

证 证法与4.2.4的证法类似.

论断2 $\langle\eta(s):s\in\omega^{<\omega}\rangle$ 是 ξ 的开的局部 θ-加细序列，结果，X 是 κ-仿紧的.

证 设 $x\in X$. 由归纳法可知，$\exists s(0)=\varnothing$. $\forall n\in N$ $\exists s(n)=\langle k_0,\cdots,k_{n-1}\rangle\in\omega^n$，使得 $s(n)=s(n-1)\hat{+}k_{n-1}$ 且 $\eta(s(n))$ 在 x 有半开的局部星形 F^*-加细. 由定义，存在有限子集 $A_n\subset\kappa\cdot 2\,\exists W(x,n)\in N(x)$，使得 $\forall G\in N(x)$，若 $G\subset W(x,n)$，则 $\mathrm{St}(G,\varphi_{s(n+1)})\subset\mathrm{St}(G,\{V(s(n),\beta):\beta\in A_n\})$. 令

$$G(x,0)=W(x,0),$$

$$G(x,n)=W(x,0)\cap\cdots\cap W(x,n),\ n\in N.$$

$$D_n=\{\beta\in A_n:G(x,n)\cap V(s(n),\beta)\neq\varnothing\}.$$

因 $G(x,n)\subset W(x,n)$，有

$$\mathrm{St}(G(x,n),\varphi_{s(n+1)})\subset\bigcup_{\beta\in D_n}V(s(n),\beta).\tag{3}$$

$\forall n<\omega$ 令 $\beta_n=\max D_n$，$\delta=\min\{\beta_n:n<\omega\}$. 设 $\delta=\beta_m$，$m<\omega$. 下证

$\eta(s(m+1))$在点 x 是局部有限的. 为此,先证

$$G(x,m)\cap\bigcup\{V(s(m+1),\rho):\rho\geqslant\kappa\wedge\rho>\delta\}=\varnothing. \tag{4}$$

事实上,设 $\rho\geqslant\kappa$ 且 $\rho>\delta$,则 $\rho>\max D_m$. 由(3)知,

$$\mathrm{St}(G(x,m),\varphi_{s(m+1)})\subset\bigcup_{\beta<\rho}V(s(m),\beta).$$

则 $G(x,m)\cap\mathrm{St}(X\setminus\bigcup_{\beta<\rho}V(s(m),\beta),\varphi_{s(m+1)})=\varnothing$. 其次,因 $\rho\geqslant\kappa$, $\exists!\ \alpha<\kappa$,使得 $\rho=\kappa+\alpha$. 由(2)知,

$$V(s(m+1),\rho)\subset\mathrm{St}(X\setminus\bigcup_{\beta<\kappa+\alpha}V(s(m),\beta),\varphi_{s(m+1)}).$$

故 $G(x,m)\cap V(s(m+1),\rho)=\varnothing$,(4)真. 我们再证

$$G(x,m)\cap\bigcup\{V(s(m+1),\rho):\rho\geqslant\kappa\}=\varnothing. \tag{5}$$

设 $\rho\geqslant\kappa$. 据(4),只需证 $\kappa>\delta$. 反证,若 $\kappa\leqslant\delta$. $\forall\rho>\delta$ 也有 $\rho\geqslant\kappa$. 据(4),$G(x,m)\cap V(s(m+1),\rho)=\varnothing$. 其次,$\forall\beta\geqslant\delta$ 也有 $\beta\geqslant\kappa$. 由(2)知,

$$V(s(m+2),\beta)\subset\bigcup_{\rho>\beta}V(s(m+1),\rho)\subset\bigcup_{\rho>\delta}V(s(m+1),\rho).$$

于是有 $G(x,m)\cap\bigcup_{\beta\geqslant\delta}V(s(m+2),\beta)=\varnothing$.

另一方面,因 $\beta_{m+2}\in D_{m+2}$且 $G(x,m+2)\subset G(x,m)$,由 D_{m+2}的定义知,$G(x,m)\cap V(s(m+2),\beta_{m+2})\supset G(x,m+2)\cap V(s(m+2),\beta_{m+2})\neq\varnothing$. 故 $\beta_{m+2}<\delta$. 此与 δ 的定义矛盾. (5)真.

由(5)知,为了证明 $\eta(s(m+1))$在 x 局部有限,只需证

$$C=\{\rho<\kappa:G(x,m)\cap V(s(m+1),\rho)\neq\varnothing\}$$

是有限的. $\forall n=0,1,\cdots,m+1$,令 $B_n=\{\rho<\kappa:\kappa+\rho\in D_n\}$. 则 B_n 有限. 只需证

$$C\subset\bigcup_{n=0}^{m+1}B_n. \tag{6}$$

设 $\rho\in C$,则 $\rho<\kappa$ 且$\exists y\in G(x,m)\cap V(s(m+1),\rho)$. 因 $y\in V(s(m+1),\rho)\setminus V(s(0),\rho)$,$\exists p\leqslant m$,使得

$$y\in V(s(p+1),\rho)\setminus V(s(p),\rho).$$

由 $s(p+1)=s(p)\dotplus k$, 及(1)知，

$$y\in \mathrm{St}(X\setminus \bigcup_{\beta\neq\kappa+\rho} V(s(p),\beta),\varphi_{s(p+1)}).$$

于是有

$$\exists u\in X\setminus\bigcup_{\beta\neq\kappa+\rho}V(s(p),\beta),\ y\in \mathrm{St}(u,\varphi_{s(p+1)}). \qquad (7)$$

因 $y\in G(x,m)\subset G(x,p)$，由(3)知，

$$u\in \mathrm{St}(y,\varphi_{s(m+1)})\subset \mathrm{St}(G(x,p),\varphi_{s(p+1)})\subset\bigcup_{\beta\in D_p}V(s(p),\beta).$$

则 $\exists\beta_0\in D_p$, $u\in V(s(p),\beta_0)$. 由(7)知，$\kappa+\rho=\beta_0\in D_p$, $\rho\in B_p$. (6)真. 论断2真. 证毕.

4.4.15　系　空间 X 是 k-仿紧的当且仅当 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖有半开的局部星形 F^*-加细.

4.4.16　引理　空间 X 是 κ-仿紧的当且仅当它的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持开覆盖有开的局部 θ-加细序列.

证　因良序开覆盖是内部保持的，由4.4.10知.

4.4.17　引理　若空间 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持开覆盖有内部保持开的局部星形 F^*-加细序列，则 X 是 κ-仿紧的.

证　在定理4.4.14的证明中，如果 ξ 与每个 $\varphi_{s|k}$ 皆是内部保持开覆盖，则所构成的每个 $\eta(s)$ 也是内部保持开覆盖. 在本引理的假设下，由该定理4.4.14的证明可证得：X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持开覆盖有(内部保持)开的局部 θ-加细序列. 由前一引理知，X 是 κ-仿紧的. 证毕.

4.4.18　定义　设 $\xi,\eta,\eta_n(n<\omega)$ 是空间 X 的覆盖.

(Ⅰ)　η 是 ξ 在 $x\in X$ 的**局部星形 $\dot{F}$-加细(局部星形 $\overline{F}$-加细)**，如果 $\exists G\in N(x)$ $\exists$有限的 $\xi'\subset\xi$，使得 $x\in\bigcap\xi'$ $(x\in\bigcap\{\overline{U}:U\in\xi'\})$ 且 $\mathrm{St}(G,\eta)\subset\bigcup\xi'$.

(Ⅱ)　η 是 ξ 的局部星形 $\dot{F}$-加细($\overline{F}$-加细)，如果 $\forall x\in X$，η 是 ξ 在 x 的局部星形 $\dot{F}$-加细($\overline{F}$-加细).

（Ⅱ）　(η_n)是ξ的局部星形$\dot{F}$-加细序列($\bar{F}$-加细序列)，如果$\forall x\in X$ $\exists n(x)<\omega$，使得$\eta_{n(x)}$是ξ在x的局部星形$\dot{F}$-加细($\bar{F}$-加细).

设ξ，η是空间X的覆盖. 易知，

（Ⅰ）　若η是ξ在x的局部星形$\bar{F}$-加细，则η是ξ在x的局部星形F^*-加细.

（Ⅱ）　若η是ξ在x的局部星形$\dot{F}$-加细，则η是ξ在x的局部星形$\bar{F}$-加细.

（Ⅲ）　设X是正则空间. 若X的每个开覆盖有开的局部星形$\bar{F}$-加细(序列)，则X的每个开覆盖有开的局部星形$\dot{F}$-加细(序列).

4.4.19　系　(Burke[1984])　一个正则空间是仿紧的当且仅当它的每个开覆盖有开的局部星形$\dot{F}$-加细.

4.4.20　系　(Jiang[1984])　一个正则空间是仿紧的当且仅当它的每个开覆盖有半开的局部星形$\dot{F}$-加细序列.

4.4.21　系　(Yajima[1989])　一个正则空间是仿紧的当且仅当它的每个开覆盖有半开的局部星形$\bar{F}$-加细.

4.4.22　系　一个正则空间是仿紧的当且仅当它的每个开覆盖有半开的局部星形$\bar{F}$-加细序列.

4.4.23　引理　设ξ是空间X的内部保持开覆盖. 则ξ有内部保持开的局部W-加细当且仅当ξ有内部保持开的局部星形F^*-加细.

证　必要性显然.

充分性.　设ξ有内部保持开的局部星形F^*-加细η. 则η是ξ^F的局部星形加细. 据3.3.21，ξ有内部保持开的局部W-加细. 证毕.

4.4.24　引理　设ξ是空间X的内部保持开覆盖，则下列各

条等价：

（Ⅰ）　ξ有内部保持开的局部 W-加细序列；

（Ⅱ）　ξ有内部保持开的局部星形 F^*-加细序列；

（Ⅲ）　ξ^F 有内部保持开的局部星形加细序列.

证　（Ⅰ）→（Ⅱ）与（Ⅱ）→（Ⅲ）显然.

（Ⅲ）→（Ⅰ）由假设（Ⅲ）及4.2.14知，ξ^F 有 σ-闭包保持闭加细 φ，使得 $\{F^\circ : F\in\varphi\}$ 覆盖 X. 据4.2.13，ξ 有内部保持开的局部 W-加细序列. 证毕.

4.4.25　引理　设 ξ 是空间 X 的内部保持开覆盖，则下列各条等价：

（Ⅰ）　ξ有内部保持开的点式 W-加细；

（Ⅱ）　ξ有内部保持开的点星形 $\dot{F}$-加细；

（Ⅲ）　ξ^F 内部保持开的点星形加细.

证　（Ⅰ）→（Ⅱ）与（Ⅱ）→（Ⅲ）显然.

（Ⅲ）→（Ⅰ）由假设（Ⅲ）及3.3.18知，ξ^F 有闭包保持闭加细. 由3.3.19知，ξ 有内部保持开的点式 W-加细. 证毕.

4.4.26　引理　若空间 X 的开覆盖 ξ 有点有限的开加细 η，则 X 有闭包保持闭覆盖 φ，使得

$\forall x\in X\ \exists F_x\in\varphi\ \exists$有限的 $\xi_x\subset(\xi)_x$，使得

$$x\in F_x\subset\bigcup\xi_x.$$

若 η 还是 ξ 的局部有限加细，则

$\forall x\in X\ \exists F_x\in\varphi\ \exists G\in N(x)\ \exists$有限的 $\xi_x\subset(\xi)_G$，使得

$$x\in F_x^\circ\subset F_x\subset\bigcup\xi_x.$$

证　令 $S=\{s : s\subset\eta, |s|<\omega\}$. $\forall s\in S$，$F(s)=X\setminus\bigcup(\eta\setminus s)$. 则 $\varphi=\{F(s) : s\in S\}$是 X 的闭包保持闭覆盖. $\forall x\in X$，令 $F_x=F((\eta)_x)$. $\forall V\in(\eta)_x$，$\exists U(V)\in\xi$，使得 $x\in V\subset U(V)$. 令

$$\xi_x = \{U(V): V \in (\eta)_x\}.$$

则 $\xi_x \subset (\xi)_x$ 且 $x \in F_x \subset \bigcup \xi_x$.

若 η 还是 ξ 的局部有限加细. $\forall x \in X\ \exists G \in N(x)$,使得 $(\eta)_G \in S$. 令 $F_x = F((\eta)_G)$,则 $G \subset F_x$. 从而 $x \in F_x^o$. $\forall V \in (\eta)_G \exists U(V) \in \xi$,使得 $V \subset U(V)$. $G \cap U(V) \supset G \cap V \neq \varnothing$. 令

$$\xi_x = \{U(V): V \in (\eta)_G\}.$$

则 $\xi_x \subset (\xi)_G$ 且 $F_x \subset \bigcup \xi_x$. 证毕.

4.4.27　定理　对任意空间 X,下列各条等价:

(Ⅰ)　X 是 κ-仿紧的;

(Ⅱ)　X 的每个势 $\leqslant \kappa$ 的定向开覆盖有闭包保持闭加细 φ,使得 $\{F^o: F \in \varphi\}$ 覆盖 X;

(Ⅲ)　X 的每个势 $\leqslant \kappa$ 的内部保持定向开覆盖有闭包保持闭加细 φ,使得 $\{F^o: F \in \varphi\}$ 覆盖 X;

(Ⅳ)　X 的每个势 $\leqslant \kappa$ 的定向开覆盖有 σ-闭包保持闭加细 φ,使得 $\{F^o: F \in \varphi\}$ 覆盖 X;

(Ⅴ)　X 的每个势 $\leqslant \kappa$ 的内部保持定向开覆盖有 σ-闭包保持闭加细 φ,使得 $\{F^o: F \in \varphi\}$ 覆盖 X;

(Ⅵ)　X 的每个势 $\leqslant \kappa$ 的内部保持定向开覆盖有内部保持开的局部星形加细;

(Ⅶ)　X 的每个势 $\leqslant \kappa$ 的内部保持定向开覆盖有内部保持开的局部星形加细序列.

证(Ⅰ)→(Ⅱ)　设 ξ 是 κ-仿紧空间 X 的势 $\leqslant \kappa$ 的定向开覆盖,则 ξ 有局部有限开加细. 由4.4.26,X 有闭包保持闭覆盖 φ,使得 $\forall x \in X\ \exists F_x \in \varphi\ \exists G \in N(x)\ \exists$有限的 $\xi_x \subset (\xi)_G$,使得 $x \in F_x^o \subset F_x \subset \bigcup \xi_x$. 因 ξ 是定向的,$\exists U \in \xi$, $\bigcup \xi_x \subset U$. 则 $\{F_x: x \in X\}$ 是 ξ 的闭包保持闭加细,使得 $\{F_x^o: x \in X\}$ 覆盖 X.

(Ⅰ)→(Ⅱ)显然.(Ⅱ)→(Ⅵ)由3.3.20知.

(Ⅵ)→(Ⅶ)显然.

(Ⅶ)→(Ⅰ)　设ξ是空间X的势$\leqslant\kappa$的内部保持开覆盖,则ξ^{F}是X的势$\leqslant\kappa$的内部保持定向开覆盖.由假设(Ⅶ),它有内部保持开的局部星形加细序列.据4.4.24,ξ有内部保持开的局部星形F^{*}-加细序列.据4.4.16,X是κ-仿紧的.

(Ⅰ)→(Ⅳ),(Ⅳ)→(Ⅴ)显然.(Ⅴ)→(Ⅶ)由4.2.14知.证毕.

4.4.28　系　对任意空间X,下列各条等价:

(Ⅰ)　X是κ-仿紧的;

(Ⅱ)　X的每个势$\leqslant\kappa$的内部保持定向开覆盖有内部保持开的局部W-加细;

(Ⅲ)　X的每个势$\leqslant\kappa$的内部保持定向开覆盖有内部保持开的局部星形F^{*}-加细;

(Ⅳ)　X的每个势$\leqslant\kappa$的内部保持定向开覆盖有内部保持开的局部W-加细序列;

(Ⅴ)　X的每个势$\leqslant\kappa$的内部保持定向开覆盖有内部保持开的局部星形F^{*}-加细序列.

证　由4.4.24知(Ⅳ),(Ⅴ)与4.4.27的(Ⅶ)等价.由4.4.23及3.3.20知(Ⅱ),(Ⅲ)与4.4.27的(Ⅵ)等价.证毕.

4.4.29　系　(Junnila[1979a])对任意空间X,下列各条等价:

(Ⅰ)　X是仿紧的;

(Ⅱ)　X的每个定向开覆盖有闭包保持闭加细φ,使得$\{F^{\circ}:F\in\varphi\}$覆盖$X$.

(Ⅲ)　X的每个内部保持定向开覆盖有σ-闭包保持闭加细φ,使得$\{F^{\circ}:F\in\varphi\}$覆盖$X$.

(Ⅳ)　X的每个内部保持定向开覆盖有内部保持开的局部星

形加细.

4.4.30　引理　若空间 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖有半开的点星形 $\hat{F}$-加细,则 X 是 κ-离散亚可膨胀的.

证　设 $\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 内的离散闭集族.令

$$U_\alpha = X\setminus\bigcup\{F_\beta:\beta\neq\alpha\},\alpha<\kappa.$$

则 $\xi=\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是 X 的开覆盖.由假设,它有半开的点星形 $\hat{F}$-加细 η.令 $H_\alpha=(\mathrm{St}(F_\alpha,\eta))^\circ,\alpha<\kappa$.则 $F_\alpha\subset H_\alpha$.$\forall x\in X,\xi$ 有有限子族 $\xi_x=\{U_{\alpha_0},\cdots,U_{\alpha_n}\}$,使得 $x\in\bigcap\xi_x$ 且 $\mathrm{St}(x,\eta)\subset\bigcup\xi_x$.令 $C=\{\alpha<\kappa:x\in H_\alpha\}$.则 $C\subset\{\alpha_0,\cdots,\alpha_n\}$.于是 $\{H_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 是点有限开集族.X 是 κ-离散亚可膨胀的.证毕.

4.4.31　定理　对任意空间 X,下列各条等价:

(Ⅰ)　X 是 κ-亚紧的;

(Ⅱ)　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖有半开的点有限加细;

(Ⅲ)　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖有半开的点式 W-加细;

(Ⅳ)　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖有半开的点星形 $\hat{F}$-加细.

证　(Ⅰ)→(Ⅱ),(Ⅱ)→(Ⅲ)及(Ⅲ)→(Ⅳ)显然.

(Ⅳ)→(Ⅰ)由假设(Ⅳ)及4.2.4知,X 是 κ-次亚紧的.由4.4.30知,X 是 κ-离散亚可膨胀的.据4.3.15,X 是 κ-亚紧的.

4.4.32　系(Worrell[1966a])空间 X 是亚紧的当且仅当它的每个开覆盖有开的点式 W-加细.

4.4.33　引理　若空间 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开覆盖有半开的点星形加细,则 X 是 κ-集体正规的.

证　证法与4.4.30类似.

4.4.34　定理　若 T_1 空间 X 的每个开覆盖有半开的点星形加细,则 X 是仿紧的.

证　由假设及4.4.31知,X 是亚紧的.由前一引理知,X 是集体

正规的. 据4.1.17，X 是仿紧的. 证毕.

4.4.35　引理　若空间 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持开覆盖有内部保持开的点星形 $\hat{F}$-加细，则 X 是 κ-亚紧的.

证　由假设及系4.2.11知，X 是 κ-次亚紧的. 由4.4.30知，X 是 κ-离散亚可膨胀的. 据4.3.15，X 是 κ-亚紧的. 证毕.

4.4.36　定理　对任意空间 X，下列各条等价：

（Ⅰ）　X 是 κ-亚紧的；

（Ⅱ）　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的定向开覆盖有闭包保持闭加细；

（Ⅲ）　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持定向开覆盖有闭包保持闭加细；

（Ⅳ）　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持定向开覆盖有内部保持开的点星形加细；

（Ⅴ）　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持定向开覆盖有内部保持开的点星形 $\hat{F}$-加细；

（Ⅵ）　X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持定向开覆盖有内部保持开的点式 W-加细.

证　（Ⅰ）→（Ⅱ）　设 ξ 是 κ-亚紧空间 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的定向开覆盖，则 ξ 有点有限开加细. 据4.4.26，X 有闭包保持闭加细 φ，使得 $\forall x\in X\ \exists F_x\in\varphi\ \exists$ 有限的 $\xi_x\subset(\xi)_x$，使得 $x\in F_x\subset\bigcup\xi_x$. 因 ξ 是定向的，$\exists U\in\xi$，$\bigcup\xi_x\subset U$. 则 $\{F_x: x\in X\}$ 是 ξ 的闭包保持闭加细.

（Ⅱ）→（Ⅲ）显然.（Ⅲ）→（Ⅳ）由3.3.20知.

（Ⅳ）→（Ⅰ）设 ξ 是空间 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持开覆盖，则 ξ^F 是 X 的势 $\leqslant\kappa$ 的内部保持定向开覆盖. 由假设（Ⅳ），ξ^F 有内部保持开的点星形加细. 据4.4.25，ξ 有内部保持开的点星形 $\hat{F}$-加细. 由前一引理知，X 是 κ-亚紧的.

（Ⅳ）↔（Ⅴ）↔（Ⅵ）由4.4.25知. 证毕.

4.4.37　系　(Junnila[1979a])对任意空间 X，下列各条等价：

(Ⅰ)　X 是亚紧的；

(Ⅱ)　X 的每个定向开覆盖有闭包保持闭加细；

(Ⅲ)　X 的每个内部保持定向开覆盖有闭包保持闭加细；

(Ⅳ)　X 的每个内部保持定向开覆盖有内部保持开的点星形加细.

4.4.38　系　设 X 是 κ-亚紧的且 $f: X \to Y$ 是闭的满映射，则 Y 是 κ-亚紧的.

证　设 $\xi = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是 Y 的定向开覆盖. 则 $\{f^{-1}[U_\alpha] : \alpha < \kappa\}$ 是 X 的定向开覆盖，从而它有一个闭包保持闭加细 φ. 则 $\{f[F] : F \in \varphi\}$ 是 ξ 的闭包保持闭加细. Y 是 κ-亚紧的. 证毕.

4.4.39　系　(Worrell[1966a])　亚紧空间的闭连续像是亚紧的.

4.4.40　引理　设 X 是 κ-亚紧空间且 $f: X \to Y$ 是伪开的有限到一映射，则 Y 是 κ-亚紧的.

证　设 ξ 是 Y 的势 $\leqslant \kappa$ 的开覆盖. 则 $\{f^{-1}[U] : U \in \xi\}$ 是 X 的势 $\leqslant \kappa$ 的开覆盖，从而它有点有限开加细 η. $\varphi = \{f[V] : V \in \eta\}$ 是 Y 的半开覆盖. 为证 Y 是 κ-亚紧的，只需再证

$$\varphi \text{ 是 } \xi \text{ 的点星形 } F\text{- 加细} \tag{1}$$

设 $y \in Y$ 且设 $f^{-1}[y] = \{x_0, \cdots, x_k\}$. $\eta' = \bigcup_{i=0}^{k} (\eta)_{x_i}$ 是有限的. $\forall V \in \eta'\ \exists U(V) \in \xi$，使得 $V \subset f^{-1}[U(V)]$. 则 $\xi' = \{U(V) : V \in \eta'\}$ 是 ξ 的有限子族，使得 $y \in \bigcap \xi'$ 且 $\mathrm{St}(y, \varphi) \subset \bigcup \xi'$. (1)真. 证毕.

§4.5　某些公开问题

下面列出一些未解决的问题，供有兴趣的读者研究.

4.5.1(Katuta[1975])　对空间 X，下列各条是否等价?

(a)　X 是仿紧的；

(b)　X 的每个定向开复盖有开的局部星形加细；

(c)　X 的每个定向开复盖有开的垫状加细.

参见 Y. Yajima[1989].

4.5.2(Katuta[1975])　对空间 X，下列各条是否等价?

(a)　X 是亚紧的；

(b)　X 的每个定向开复盖有开的点星形加细；

(c)　X 的每个定向开复盖有垫状加细.

4.5.3(Katuta[1975])　对空间 X，下列各条是否等价?

(a)　X 是次亚紧的；

(b)　X 的每个定向开复盖有开的点星形加细序列；

(c)　X 的每个定向开复盖有 σ-垫状加细.

4.5.4(Tall)　正规、局部紧亚紧空间是仿紧的吗?

4.5.5(Nagami[1955])　是否存在 T_2 正规可遮的非仿紧空间?

参见 Rudin[1983a].

4.5.6(Junnila[1979])　若空间 X 的每个良序开复盖有半开的点有限加细，X 是亚紧的吗?

4.5.7(Junnila[1980])　每个亚紧空间都是某个仿紧空间在(伪)开、紧映射下的像吗?

参见习题 4.*C*.

4.5.8(Junnila[1980])　第一可数次正规的次亚紧空间是次仿紧的吗?

4.5.9(Junnila[1980])　若 X 是 Tychonoff 空间,使得积空间 $X\times\beta X$ 是次正规的,X 是次仿紧的吗?

4.5.10(刘[1977])　正规的 σ-集体正规空间是否是集体正规的?

参见习题 4.*J*.

4.5.11　是否存在 T_2 或正则的弱 $\bar{\theta}$-可加细空间,它不是狭义拟仿紧的?

参见习题 4.*G*.

4.5.12　设 $f: X\to Y$ 是完备的满映射.

(Ⅰ)　若 X 是狭义拟仿紧空间,Y 是狭义拟仿紧的吗?

(Ⅱ)　若 Y 是狭义拟仿紧空间,X 是狭义拟仿紧的吗?

4.5.13　具有性质 b_1 的空间是狭义拟仿紧的吗?

4.5.14(Rudin and Starbird)　设 $X\times Z$ 是仿紧空间且 $f: X\to Y$ 是闭的满映射,$Y\times Z$ 是仿紧的吗?

4.5.15(Przymusinski[1984])　找出定理 3.2.18 的一个合理简单的证明.

【习　题】

4.*A*. 试证:对任意空间 X,下列各条等价:

(Ⅰ)　X 是可数亚紧的;

(Ⅱ)　X 是可数亚可膨胀的;

(Ⅲ)　X 是可数次亚可膨胀的;

（Ⅳ）　X 是可数次亚紧的.

系(Gittings[1974])　次亚紧空间是可数亚紧的.

4.B. 试证(Hodel[1970])：(Ⅰ)空间 X 是可数次仿紧的当且仅当 X 的每个可数开覆盖 $\{U_n : n<\omega\}$ 有一个可数闭加细 $\{F_{ni} : n, i<\omega\}$，使得 $\forall n, i<\omega, F_{ni}\subset U_n$；

（Ⅱ）　每个可数次仿紧空间是可数亚紧的；

（Ⅲ）　每个可遮的可数次仿紧空间是次仿紧的.

4.C. **定义**　映射 $f: X\to Y$ 是紧的，如果 $\forall y\in Y, f^{-1}[y]$ 是 X 的紧子集.

试证：若 X 是 κ—仿紧空间且 $f: X\to Y$ 是伪开的紧映射，则 Y 是 κ—亚紧的.

4.D. 试证(高[1980])：设 X 是正则空间，$f: X\to Y$ 是闭的满映射，使得 $\forall y\in Y, f^{-1}[y]$ 是 Lindelöf 的. 若 Y 是次仿紧空间，则 X 也是次仿紧空间.

4.E. 试证(吴[1984])：设 $f: X\to Y$ 是伪开的有限到一映射，若 X 是(离散)亚可膨胀的空间，则 Y 也是.

4.F. 试证(刘[1977])：T_1 狭义拟仿紧空间 X 是 ω_1-紧的当且仅当它是 Lindelöf 的.

4.G. **定义**(Smith[1985])　（Ⅰ）　设 $\kappa\geqslant\omega$. 空间 X 是 **κ-弱 $\bar{\theta}$-可加细的**，如果 X 的每个势 $\leqslant\kappa$ 的开复盖有一个开加细 $\bigcup_{n<\omega}\eta_n$，使得 $\forall x\in \exists n(x)<\omega, 0<|(\eta_{n(x)})_x|<\omega$ 且 $\{\bigcup\eta_n : n<\omega\}$ 是点有限的. $\bigcup_{n<\omega}\eta_n$ 称为 X 的一个**弱 $\bar{\theta}$ 复盖**.

（Ⅱ）　空间 X 是**弱 $\bar{\theta}$-可加细的**，如果 $\forall\kappa\geqslant\omega$，$X$ 是 κ-弱 $\bar{\theta}$-可加细的.

试证：(Ⅰ)(Smith[1980])　κ-狭义拟仿紧空间是 κ-弱 $\bar{\theta}$-可加细的.

（Ⅲ）　举例说明存在 T_2 全正则的弱 $\bar{\theta}$-可加细空间不是次亚紧的.

4.H. 试证：空间 X 的每个子空间是狭义拟仿紧的当且仅当它的每个开子空间是狭义拟仿紧的.

4.I. **定义**　空间 X 称为 **σ-紧的**，如果它可表为可数多个紧子集的并.

试证：（Ⅰ）　若空间 X 具有性质 b_1，则 X 的每个 F_σ-子空间也具有性质 b_1.

（Ⅱ）　设 X 是正则空间，Y 是具有性质 b_1 的空间且 $f: X\to Y$ 是完备满映射，则 X 具有性质 b_1.

（Ⅲ）　设 X 是具有性质 b_1 的正则空间，Y 是 T_1 正则的 σ-紧空间，则 $X\times Y$ 具有性质 b_1.

4.J. 试证：对任意空间 X，下列各条等价：

（Ⅰ）　X 是 σ-集体正规的；

（Ⅱ）　X 的每个弱 $\bar{\theta}$-复盖有开的 σ-互不相交的加细；

（Ⅲ）　X 的每个弱 $\bar{\theta}$-复盖有开的 σ-点星形加细.

系　若 X 是弱 $\bar{\theta}$-可加细空间，则下列各条等价：

（Ⅰ）　X 是可遮的；

（Ⅱ）　X 是 σ-完满正规的；

（Ⅲ）　X 是 σ-集体正规的.

4. K. 试证（刘[1977]）：（Ⅰ）正则拟仿紧空间是狭义拟仿紧的.

（Ⅱ）设 X 是拟仿紧空间，则下列各条等价：

(a)　X 是可遮的；

(b)　X 是 σ-完满正规的；

(c)　X 是 σ-集体正规的.

4.L. 试证(刘[1977])：(Ⅰ) σ-集体正规的 T_1 正规狭义拟仿紧空间是仿紧的.

(Ⅱ) 正规可数狭义拟仿紧空间是可数仿紧的.

4.M. 定义 (Ⅰ) 空间 X 是**正紧**(orthocompact)的，如果 X 的每个开覆盖有内部保持开加细.

(Ⅱ) 空间 X 是**离散正可膨胀**(**正可膨胀**)的，如果对 X 内每个离散(局部有限)闭集族$\{F_s: s\in S\}$及开集族$\{U_s: s\in S\}$，使得 $F_s\subset U_s$，X 内有内部保持开集族$\{V_s: s\in S\}$，使得$\forall s\in S, F_s\subset V_s\subset U_s$.

试证(Jiang[1989])：狭义拟仿紧的离散正可膨胀空间是正紧的.

系(Junnila[1978a]) 次亚紧的离散正可膨胀空间正紧的.

注：在 Junnila 上述论文中，离散正可膨胀空间称为离散正紧空间.

4.N. 定义(Gruenhage[1979a]) 空间 X 是**点星形正紧的**，如果对 X 的每个开覆盖 ξ，存在内部保持开集族$\{V_x: x\in X\}$，使得$\forall x\in X, x\in V_x\subset \mathrm{St}(x,\xi)$.

试证(Jiang[1989])：设 X 是具有性质 b_1 的空间，则下列各条等价：

(Ⅰ) X 是正紧的；

(Ⅱ) X 是点星形正紧的；

(Ⅲ) X 是正可膨胀的.

系(Burke[1980]) 次仿紧的点星形正紧空间是正紧的.

4.O. 试证(Boone[1973])：(Ⅰ) 离散亚可膨胀空间的每个 F_σ-子空间是离散亚可膨胀的.

(Ⅱ) 一个空间的每个子空间是离散亚可膨胀的当且仅当它的每个开子空间是离散亚可膨胀的.

（Ⅲ）　完全的离散亚可膨胀空间的每个子空间是离散亚可膨胀的.

（Ⅳ）　离散亚可膨胀空间的闭连续像是离散亚可膨胀的.

（Ⅴ）　两个离散亚可膨胀空间的积空间不必是离散亚可膨胀的.

4.P. **定义**　让 $\theta(X)$表空间 X 的一切紧子集的族.

（Ⅰ）　X 的子集族 ξ 是**紧有限的**,如果$\forall K\in\theta(X)$,$(\xi)_K$ 有限.

（Ⅱ）　(Boone[1971])空间 X 是**中紧(mesocompact)的**,如果 X 的每个开覆盖有紧有限的开加细.

（Ⅲ）　X 的覆盖 η 是覆盖 ξ 的**紧式 W-加细**,如果$\forall K\in\theta(X)\exists$有限子族 $\xi'\subset\xi$,使得$(\eta)_K$ 部分加细 ξ'.

试证(Kao and Wu[1983]):对任意空间 X,下列各条等价:

（Ⅰ）　X 是中紧的;

（Ⅱ）　X 的每个开覆盖有半开的紧有限加细;

（Ⅲ）　X 的每个开覆盖有开的紧式 W-加细;

（Ⅳ）　X 的每个定向开覆盖有闭包保持闭加细 φ,使得 $\theta(X)$ 加细 φ.

4.Q. **定义**　空间 X 是 **cf-可膨胀的(离散 cf-可膨胀的)**,如果对 X 内每个局部有限(离散)闭集族$\{F_s:s\in S\}$,X 内有紧有限的开集族$\{U_s:s\in S\}$,使得$\forall s\in S$,$F_s\subset U_s$.

试证(黄[1987]):(Ⅰ)对任意空间 X,下列各条等价:

(a)　X 是 cf-可膨胀的;

(b)　X 的每个 A-覆盖有紧有限开加细;

(c)　X 的每个定向 A-覆盖有紧有限开加细;

(d)　X 的每个定向 A-覆盖有半开的紧有限加细;

(e)　X 的每个定向 A-覆盖有紧式 W-加细;

(*f*)　X 的每个定向 A-覆盖有垫状加细 φ，使得 X 的紧子集组成的覆盖加细 φ.

(Ⅰ)　空间 X 是中紧的当且仅当它是 cf-可膨胀的和狭义拟仿紧的.

4.R. **定义**　(杨[1986])(Ⅰ)　空间 X 的覆盖列 $\langle\eta_n\rangle$ 是覆盖 ξ 的**紧式 θ-加细序列**，如果每个 η_n 是 ξ 的加细且对每个紧子集 $K\subset X$，$\exists n(K)<\omega$，使得 $(\eta_{n(K)})_K$ 是有限的.

(Ⅱ)　空间 X 是**次中紧的**，如果 X 的每个开覆盖有一个开的紧式 θ-加细序列.

(Ⅲ)　空间 X 的覆盖列 $\langle\eta_n\rangle$ 是覆盖 ξ 的**紧星形 F^k-加细序列**，如果对每个紧子集 $K\subset X$ $\exists n(K)<\omega$ $\exists$有限子族 $\xi_K\subset(\xi)_K$，使得 $\mathrm{St}(K,\eta_{n(K)})\subset\bigcup\xi_K$.

试证：(Ⅰ)　中紧空间是次中紧的.举例说明次中紧空间不必是中紧的.

(Ⅱ)　空间 X 是中紧的当且仅当它是离散 cf-可膨胀的和次中紧的.

(Ⅲ)　空间 X 是次中紧的当且仅当它的每个开覆盖有一个半开的紧星形 F^k-加细序列.

4.S. **定义**　空间 X 的覆盖序列 $\langle\eta_n\rangle$ 是覆盖 ξ 的**紧星形加细序列**，如果 $\forall K\in\theta(X)\exists n(K)<\omega$ $\exists U\in\xi$ 使得 $\mathrm{St}(K,\eta_{n(K)})\subset U$. 此处 $\theta(X)$ 表 X 的一切紧子集的族.

试证：对任意空间 X，下列各条等价：

(Ⅰ)　X 是次中紧的.

(Ⅱ)　X 的每个定向开覆盖有 σ-闭包保持闭加细 φ 使得 $\theta(X)$ 加细 φ.

(Ⅲ)　X 的每个内部保持定向开覆盖有 σ-闭包保持闭加细 φ

使得 $\theta(X)$ 加细 φ.

（Ⅳ） X 的每个内部保持定向开覆盖有内部保持开的紧星形加细序列.

完成下列二习题需要熟悉专著 Engelking[1978].

4.T. 试证：（Ⅰ） 设 X 是具有性质 b_1 的强遗传正规空间. 若 X 有一个开覆盖 $\{U_s : s\in S\}$ 使得 $\forall s\in S, \mathrm{Ind}U_s\leqslant n$，则 $\mathrm{Ind}X\leqslant n$.

（Ⅱ） 设 X 是具有性质 b_1 的强遗传正规空间. 若 X 有一个局部可数的闭覆盖 φ 使得 $\forall F\in\varphi, \mathrm{Ind}F\leqslant n$，则 $\mathrm{Ind}X\leqslant n$.

系（Engelking[1978]） （Ⅰ） 设 X 是亚紧的强遗传正规空间. 若 X 有一个开覆盖 $\{U_s : s\in S\}$，使得 $\forall s\in S, \mathrm{Ind}U_s\leqslant n$，则 $\mathrm{Ind}X\leqslant n$.

（Ⅱ） 设 X 是亚紧的强遗传正规空间. 若 X 有一个局部可数闭覆盖 φ，使得 $\forall F\in\varphi, \mathrm{Ind}F\leqslant n$，则 $\mathrm{Ind}X\leqslant n$.

4.U. 试证：（Ⅰ） 若 X 是正规次亚紧空间且有一个开覆盖 $\{U_s : s\in S\}$，使得 $\forall s\in S, \dim\overline{U}\leqslant n$，则 $\dim X\leqslant n$.

（Ⅱ） 设 X 是 T_1 正规次亚紧空间且有一个局部可数闭覆盖 φ，使得 $\forall F\in\varphi, \dim F\leqslant n$，则 $\dim X\leqslant n$.

系（Engelking[1978]） （Ⅰ） 若 X 是正规亚紧空间且有一个开覆盖 $\{Us : s\in S\}$，使得 $\forall s\in S, \dim\overline{U}\leqslant n$，则 $\dim X\leqslant n$.

（Ⅱ） 设 X 是 T_1 正规亚紧空间且有一个局部可数闭覆盖 φ，使得 $\forall F\in\varphi, \dim F\leqslant n$，则 $\dim X\leqslant n$.

4.V. 试证（Jiang[1987]）：对任意空间 X，下列各条等价：

（Ⅰ） X 是亚可膨胀的；

（Ⅱ） X 的每个 l-覆盖有点有限开加细；

（Ⅲ） X 的每个定向 l-覆盖有闭包保持闭加细；

（Ⅳ） X 的每个定向 l-覆盖有半开的点星形加细；

（Ⅴ） X 的每个内部保持定向 A-覆盖有垫状加细.

系(Smith and Krajewski[1971]) 亚可膨胀空间的闭连续像是亚可膨胀的.

●●参考文献

Alexandroff, P.

[1924] Sur les ensembles de la premiere classe et les ensembles abstraits, C. R. Acad. Paris 178, 185-187.

Alexandroff, P. and Urysohn, P.

[1923] Une condition necessaire et suffisante pour quune class(L) soit une class(D), C. R. Acad. Paris 177, 1274-1276.

Alster, K.

[1975] Subparacompactness in cartesian products of generalized ordered topological spaces, Fund. Math., 87, 7-27.

Alster, K. and Engelking, R.

[1972] Subparacompactness and product spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math., 20, 763-767.

Arens, R. and Dugundji, J.

[1950] Remark on the concept of compactness, Portugaliae Math., 9, 141-143.

Arhangelskii, A. V.

[1961] New criteria for paracompactness and metrizability of an arbitrary T_1 space, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 141, 1051-1055.

[1962] Open and almost open mappings of topological space, Soviet Math. Dokl., 3, 1738-1741.

[1963] On a class of spaces containing all metric spaces and all locally bicompact spaces, Sov. Math. Dokl., 4, 751-754.

[1966] Mappings and spaces, Russian Math. Surveys 21, no., 4, 115-162.

[1972] The property of paracompactness in the class of perfectly normal locally bicompact spaces, Soviet. Math. Dokl. ,13,517-520.

Aull, C. E.

[1965] A note on countably paracompact spaces and metrization. Proc. Amer. Math. Soc. ,16,1316-1317.

[1973] A generalization of a theorem of Aquaro, Bull, Austral. Math. Soc. , 9,105-108.

Bennett, H. R. and Lutzer, D. L.

[1972] A note on weake θ-refinability, Gen. Topology Appl. ,2,49-54.

Bing, R. H.

[1951] Metrization of topological spaces, Canad. J. Math. ,3,175-y186.

Boone, J. R.

[1971] Some characterizations of paracompactness in k-spaces, Fund. Math. ,72,145-155.

[1973] A characteriztion of metacompactness in the class of θ-refinable spaces, Gen. Topology Appl. 3,253-264.

[1975] On irreducible spaces, Bull. Austral. Math. Soc. ,12,143-148.

Bourbaki, N.

[1961] Topologie generale, ch. I et II . Paris.

Burke, D. K.

[1969] On subparacompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc. ,23,655-663.

[1970] On p-spaces and w△-spaces, Pacific J. Math. ,35,285-296.

[1974] A note on R. H. Bings Example G, Top. Conf. VPI. Lecture Notes in Mathematics, 375(Springer-Verdag, New York)47-52.

[1980] Orthocompactness and perfect mappings, Proc. Amer. Math. Soc. , 49,484-486.

[1979] Refinements of locally countable collections, Topology Proc. ,4,19-27.

[1984] Covering properties, in : K. Kunen and J. Vaughan, Eds, Handbook of Set-Theoetic Topology. (North-Holl and Amsterdam.)

Cech, E.

[1937] On bicompact spaces, Ann. of Math., 38, 823-844.

Chaber, J.

[1979] On subparacompactness and related properties, Gen. Topology Appl., 10, 13-37.

Chiba, K.

[1986] On the D-property of σ-products, Math. Japonica, 32, 5-10.

Corson, H. H.

[1959] Normality in subsets of product spaces, Amer. J. Math., 81, 785-796.

Dai Mumin(戴牧民)

[1981] σ-按点族正规, σ-亚紧性和 σ-按点有限基, 数学学报, 24, 656-667.

[1983] 一类包含 Lindelöf 空间和可分空间的拓扑空间, 数学年刊, 4A (5), 571-575.

[1983a] 包含 * Lindelöf 数的几个拓扑空间基数不等式, 数学学报, 26, 731-735.

[1986]涉及到 Calibre 和 * Lindelöf 性的几个反例, 数学学报, 29, 399-402.

Dieudonne, J.

[1944] Une généralisation des espaces compacts, Journ. de Math. Pures et Appl., 23, 65-76.

Dowker, C. H.

[1951] On countably paracompact spaces, Canad. Journ. of Math., 3, 219-224.

Engelking, R.

[1977] General Topology(Polish Scientfic Publishers, Warszawa).

[1978] Dimension Theory(Polish Scientific Publishers, Warszawa.)

Frink, A. H.

[1937] Distance functions and the metrization problem, Bull. Amer. Math. Soc., 43, 133-142.

Gao Guoshi(高国士)

[1980] 仿紧性与完备映象,数学学报,第5期,794-796.

[1986] 两个映射定理,数学年刊,A,666-669.

[1986a] 关于闭包保持和定理,数学学报,29,58-62.

Gao Zhimin(高智民)

[1987] 关于 Siwiec 的一个问题,数学学报,30,671-674.

Gittings, R. F.

[1974] Some results on weak covering conditions, Canad. J. Math., 26, 1152-1156.

[1977] Open mapping theory, in: G. M. Reed, ed. Set-Theoretic Topology (Academic press, New York)141-191.

Gruenhage, G.

[1979] Paracompactness in normal locally connected, locally compact spaces, Topology Proc., 4, 393-405.

[1979a] On closed images of orthocompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 77, 389-394.

[1984] Generalized metric spaces, in: K. Kunen and J. Vaughan, Eds, Handbook of Set-Theoretic Topology(North-Holland Amsterdam).

Gulko, S. P.

[1977] On the properties of sets lying in Σ-products, Dokl. Acad. Nauk. SSSR, 237, 505-508. (in Russian).

Heath, R. W.

[1964] Screenability, pointwise paracompactness and metrization of Moore

spaces, Canad. J. Math., 16, 763-770.

Henriksen, M. and Isbell, J. R.

[1958] Some properties of compactifications, Duke Math. Journ., 25, 842-845.

Hodel, R. E.

[1970] A note on subparacompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 25, 842-845.

Huang Haoran(黄浩然)

[1987] 关于 cf-可膨胀性和 csf-可膨胀性 I(II), 江西师范大学学报, 第 2 期, 1-10(第 4 期, 27—34).

Jiang Jiguang(蒋继光)

[1986] 关于仿紧性与拓扑空间的可度量性, 数学学报, 29, 697-701.

[1987] 仿紧性的一个刻画, 四川大学学报, 24, 256-261.

[1987a] 仿紧性的一个刻画(I), 科学通报, 第 15 期, 1128-1131.

[1987b] Metrizability of topological spaces with a cs-regular base, Q and A in General Topology, 5, 243-248.

[1988] A characterization of submetacompactness, Chin. Ann. of Math. 9B (2), 151-155.

[1989] 仿紧性与性质 b_1, 数学学报, 32, 551-555.

Jiang Shouli(江守礼)

[1986] Every strict p-space is θ-refinable. Topology Proc., 11, 309-316.

[1988] On an Junnilas problem, Q and A in General Topology, 6, 43-47.

Jiang Zehan(江泽涵)

[1978] 《拓扑学引论》, 上海科技出版社.

Jones, F. B.

[1937] Concerning normal and completely normal spaces, Bull. Amer. Soc., 43, 671-677.

Junnila, H. J. K.

[1978] On submetacompactness, Topology Proc., 3, 375-405.

[1978a] Covering properties and quasi-uniformities of topological spaces, Doctoral dissertation, V. P. I. and State Univ.

[1979] Paracompactness, metacompactness, and semi-open covers, Proc. Amer. Math. Soc., 73, 244-248.

[1979a] Metacompactness, paracompactness, and interior-preserving open covers, Trans. Amer. Math. Soc., 249, 373-385.

[1980] Three covering properties, in: G. M. Reed, ed, Surveys in General Topology (Academic Press, New York 195-245).

Kao Kuoshi and Wu Lisheng (高国士与吴利生)

[1983] Mapping theoemss on mesocompact spaces, Proc. Amer. Soc., 89, 355-358.

Katetov, M.

[1951] Measures in *fully normal spaces*, Fund. Math. 38, 73-84.

[1958] Extension of *locally finite coverings*, Colloq. Math., 6, 145-151.

Katuta, Y.

[1969] On *strongly normal* spaces, Proc. Japan Acad. 45, 692-695.

[1975] Expandability and its generalizations, Fund. Math., 87, 231-250.

Kombarov, A. P. and Malyhin, V. I.

[1973] On Σ-products, Dokl. Akad. Nauks SSSR, 213, 774-776., (in Russian).

Kramer, T. R.

[1973] A note on countably subparacompact spaces, Pacific J. Math., 46, 209-213.

[1976] On the product of two topological spaces, Gen. Topology Appl., 6, 1-16.

Krajewski, L. L.

[1971] Expanding locally finite collections, Canad. J. Math., 23, 58-68.

Kuratowski, K.

[1933] Topologie I, Warszawa.

Lane, D. J.

[1980] Paracompactness in perfectly normal, locally connected, locally compact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 80, 693-696.

Lewis, I. W.

[1977] On covering properties of subspaces of R. H. Bing's Example G. Gen. Topology Appl., 7, 109-122.

Lin Shou(林寿)

[1988] 闭映射不能保持 T_1 仿紧性及紧式仿紧性，苏州大学学报，第 2 期，184-187.

Liu Yingming(刘应明)

[1977] 一类包含弱仿紧空间与次仿紧空间的拓扑空间，数学学报，20，212-214.

[1978] σ-集体正规与正规，四川大学学报，第 1 期，11-17.

Long Bing(龙冰)

[1986] 几个覆盖性质与分离性，数学学报，29，666-669.

Lutzer, D. J.

[1972] Another property of the Sorgenfrey line, compositio Math., 24, 359-363.

Mack, J.

[1967] Directed covers and paracompact spaces, Canad. J. Math., 19, 649-654.

[1969] Product spaces and paracompactness, J. London Math. Soc., 1, 90-94.

McAuley, L. F.

[1958] A note on complete collectionwise normality and paracompactness, Proc. Amer. Math. Soc., 9, 796-799.

Michael, E. A.

[1953] A note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 831-838.

[1955] *Point-finite and locally finite coverings*, Canad. J. Math., 7, 275-279.

[1957] Another note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 822-828.

[1959] Yet another note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 10, 309-314.

[1963] The product of a normal space and a metric space need not be normal, Bull. Amer. Math. Soc., 69, 375-376.

[1968] Bi-quotient maps and cartesian product of qoutient Maps, Ann. Inst. Fourier(Grenoble) 18, 287-302.

[1971] Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable cartesion products, Compositio Math. 23, 199-214.

Moore, R. L.

[1935] A set of axioms for plane analysis situs, Fund. Math., 25, 13-28.

Morita, K.

[1962] Paracompactness and product spaces, Fund Math., 50, 223-236.

[1964] Products of normal spaces with metric spaces, Math. Ann., 154, 365-382.

Mrowka, S.

[1959] Compactness and product spaces, Coll. Math., 7, 19-22.

Nagami, K.

[1955] Paracompactness and strong screenability, Nagaya Math. Journ., 8, 83-88.

[1969] Σ-spaces, Fund. Math., 65, 168-192.

Nagata, J.

[1957] A theorem for metrizability of a topological space, Proc. Japan A-

cad. ,33,128-139.

[1985] Modern General Topology, North-Hollark Publ. Co. ,Amsterdam.

Nyikos, P. J.

[1977] Covering properties on σ-scattered spaces, Topology. Proc. ,2,509-542.

Pol, R.

[1977] A perfectly normal locally metrizable non-paracompact space, Fund. Math. ,97,37-42.

Potoczny, H.

[1973] Closure-preserving families of compact sets, Gen. Topology Appl. ,3,243-248.

Potoczny, H. and Junnila, H. J. K.

[1975] Closure-preserving families and metacompactness, Proc. Amer. Math. Soc. ,53,523-529.

Przymusinski, T. C.

[1980] Normality and paracompactness in finite and countable cartesian products, Fund. Math. ,105,87-104.

[1984] Products of normal spaces, in: K. Kunen and J. Vaughan, Eds. , Handbook of Set-Theoretic Topology. (North-Holland Amsterdam).

Pu Paoming, Jiang Jiguang and Hu Shuli. (蒲保明,蒋继光,胡淑礼)

[1985] 拓扑学,高等教育出版社.

Rudin, M. E.

[1971] A normal space X for which X×I is not normal, Fund. Math. ,73,179-186.

[1975] The normality of products with a compact factor, Gen. topology Appl. ,5,45-59.

[1977] Σ-products of metric spaces are normal, Preprint.

[1983] A normal screenable non-paracompact space, Topology Appl., 15, 313-322.

[1983a] Collectionwise normality in screenable spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 87, 347-350.

Rudin, M. E. and Starbird, M.

[1975] Products with a metric factor, Gen. Topology Appl., 5, 235-248.

Sconyers, W. B.

[1970] Metacompact spaces and well-ordered open coverings, Notices Amer. Math. Soc., 18, 230

Singal, M. K. and Arya, S. P.

[1969] On m-paracompact spaces, Math. Ann., 181, 119-133.

Siwiec, F. and Mancuso, V. J.

[1971] Relations among certain mappings and conditions for their equivalence, Gen. Topology Appl., 1, 33-41.

Smirnov, Yu. M.

[1956] On strongly paracompact spaces, Izv. Akad. Nauk SSSR, Math. Ser., 20, 253-274.

Smith, J. C.

[1975] Properties of weak θrefinable spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 53, 511-517.

[1976] On θ-expandable spaces, Glasnik Math. 11(31), 335-346.

[1980] Irreducible spaces and property b_1, Topology Proc., 5, 187-200.

Smith, J. C. and Krajewski, L. L.

[1971] Expandability and collectionwise normality, Trans. Amer. Math. Soc., 160, 437-451.

Sorgenfrey, R. H.

[1947] On the topological product of paracompact spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 53, 631-632.

Starbird, M.

[1974] Normality in products with a compact factor, Thesis, Univ. of wisconsin, Madison. Wisc.

Stone, A. H.

[1948] Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 977-982.

Tamano, H.

[1960] On paracompactness, Pacific Journ. of Math., 10, 1043-1047.

[1971] A characterization of paracompactness. Fund. Math., 72, 189-201.

Telgarsky, R.

[1975] Spaces defined by topological games, Fund. Math., 88, 193-223.

[1976] Concerning two covering properties, Colloq. Math., 46, 57-61.

Teng Hui (滕辉)

[1989] On collectionwise normality of product spaces, Q and A in General Topology, 7, 31-42.

Tietze, H.

[1951] Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, Journ. fur die reine and angew. Math., 145, 9-14.

Tukey, J. W.

[1940] Convergence and uniformity in topology, Ann. of Math. Studies. Princeton.

Urysohn, P.

[1925] Über die Mächtigkeit der zusammenhangenden Mengen, Math. Ann., 94, 262-295.

Vaughan, J. E.

[1970] Linearly ordered collections and paracompactness, Proc. Amer. Math. Soc., 24, 186-192.

Wang Guojun (王国俊)

[1988] L-fuzzy 拓扑空间论,陕西师范大学出版社.

Wang Shutang(王成堂)

[1964] Remarks on ω_μ-additive spaces, Fund. Math. ,55,125-136.

[1981] The rational line partitions every self-dense metrizable space, Topology Appl. ,12,331-332.

Watston, W. S.

[1982] Locally compact normal spaces in the constructible universe, Canad. J. Math. ,34,1091-1096.

Wicke, H. H. and Worrell, Jr. J. M.

[1979] A covering property which implies isocompactness. Topology Proc. , 4,213-224.

Worrell, Jr. J. M.

[1966] A characterization of metacompact spaces, Portugal. Math. ,25,171-174.

[1966a] The closed continuons images of metacompact topological spaces, Portugal. Math. ,25,175-179.

[1967] Some properties of fully normalcy and their relations to Čech completeness, Notices Amer. Math. Soc. ,14,555.

[1968] Paracompactness as a relaxation of full normalcy, Notices Amer Math. Soc. ,15,661.

Worrell, Jr. J. M. and Wicke, H. H.

[1965] Charcterizations of developable topological space, Canad. J. Math. , 17,820-830.

[1979] A covering property which implies isocompactness, Proc. Amer. Math. Soc. ,79,331-334.

Wu Lisheng(吴利生)

[1984] 关于有限到一伪开映射的一点注记,苏州大学学报,第1期,8-12.

[1985] θ-refinability and some related properties，中日一般拓扑学学术会议上的报告，北京.

[1987] 关于序闭镶加细的一点注记，苏州大学学报，第1期，1-6.

Xiong Jicheng(熊金城)

[1982] 点集拓扑讲义，人民教育出版社.

Yajima，Y.

[1976] Solution of R. Telgarskys problem，Proc. Japan. Acad.，52，4348-350.

[1984] Generalized metric spaces(在中国讲学的讲义)

[1989] On a problem of paracompactness，in：Abstracts，China-Japan Topology Symposium.

Yang Changcheng(杨长诚)

[1986] 中紧性及其推广，四川大学硕士论文摘要汇集，1987年，1—2期.

Yang Shoulian and Williams，S. W. (杨守廉等)

[1987] On the countable box product of compact ordinals，Topology Proc.，12.

Zenor，P.

[1973] Certain subsets of products of θ-refinable spaces are realcompact，Proc. Amer. Soc.，40，612-614.

Zhong Ning(钟宁)

[1984]关于σ—可膨胀空间，硕士论文，数学年刊，7A(4)，1986，482—488.

Zhu Jun(朱俊)

[1984] 拟仿紧和狭义拟仿紧空间的一些性质，数学研究与评论，第1期，9-13.

[1988] On collectionwise subnormal spaces，Chin. Ann. of Math. 9B(2)，216-220.

符号索引

符号	位置
$\bigcup x, \bigcap x$	1.1.6
$A\setminus B$	1.1.6
$A\times B$	1.1.9
A_B	1.1.9
$A^{<\omega}, A^n$	1.2.25
$\lvert A\rvert$	1.3.3
$[A]^k, [A]^{<k}, [A]^{\leqslant k}$	1.3.29
$(\xi)_G, (\xi)_x$	§2.1前
$\xi\mid G$	§2.1前
ξ^F	2.3.2
$B_\rho(x,r)$	2.1.7
$cf(\beta)$	1.3.23
$f\mid C$	1.1.9
$\hat{f}$	1.1.9
$I=[0,1]$	2.1.21
id_A	1.1.9
$\inf C$	1.1.11
$\varprojlim(X_i, \varphi_i^j)$	3.4.20
$\max C, \min C$	1.1.11
$N(A), N(x)$	§2.1前
$N=\omega\setminus\{\varnothing\}$	1.3.10
$\bar{n}$	3.4.6
$\varnothing$	1.1.3
$P(A)$	1.1.7
$pred(A,x,R)$	1.1.12
p_B	3.4.9
$R[A]$	1.1.9
$\sup C$	1.1.11
$Supp(x)$	3.4.12
$S(x)$	1.2.6
$s\dotplus\alpha$	1.2.25
$St(G,\xi), St(x,\xi)$	§2.1前
$t(X)$	3.4.15
$\xi\wedge\eta$	2.1.17
$\langle x_0, \cdots, x_{n-1}\rangle$	1.2.25
X^b	3.4.12
$\alpha\oplus\beta, \alpha\odot\beta$	1.2.17
α^β	1.2.24
α^+	1.3.18
$\kappa+\lambda, \kappa\cdot\lambda, \kappa^\lambda$	1.3.7
$\prod_{s\in S} A_s$	1.1.9
π_B	3.4.12
$\Sigma(b, X_s, S)$	3.4.12
$\chi(X)$	3.4.14

ω	1.2.10	$\nabla\{f_s : s\in S\}$	1.1.9
ω_α	1.3.19	$\leq, \approx$	1.3.1

索引

一 画

A-覆盖 A-cover 3.3.23

$\eta(C)$-覆盖 $\eta(C)$-cover 3.1.16

ccc 空间 ccc-space 3.2.9

cf-可膨胀空间 cf-expandable space 4.Q

cs-展开 cs-development 2.S

d-覆盖 d-cover 3.2.21

F-加细 F-refinement 2.3.13

l-覆盖 l-cover 3.3.23

n-局部有限的 n-locally finite 3.3.4

θ-可膨胀空间 θ-expandable space 3.3.10

θ-加细序列 θ-refining sequence 4.2.1

初始 κ-紧空间 initially κ-compact space 4.3.29

σ-(离散)可膨胀空间 σ-(discretely) expandable space 3.P

σ-完满正规的 σ-fully normal 3.I

σ-相对局部有限的 σ-relatively locally finite 3.3.22

σ-相对垫状加细 σ-relatively cushioned refinement 2.F

σ-紧空间 σ-compact space 4.I

σ-集体正规的 σ-collectionwise normal 3.I

Σ-空间 Σ-space 3.4.5

Σ-积 Σ-product 3.4.12

ω_1-紧空间 ω_1-compact space 3.D

二 画

几乎开映射 almost open mapping 2.2.38

三 画

上升集列 increasing sequence of sets 2.3.5

下降集列 decreasing sequence of sets 2.P

四 画

内部保持的 interior-preserving 3.3.14

双商映射 biquotient mapping 3.3.30

中紧空间 mesocompact space 2.2.12

五 画

加细 refinement 2.1.[illegible]

半开覆盖 semi-open cover 2.3.13

外延性公理 axiom of extensionality 1.1.2

外网络 outer network 3.4.2

正则序数 regular ordinal 1.3.26

正规覆盖 normal cover 2.1.4

正规空间 normal space 2.1.26

正可膨胀空间 orthoexpandable space 4.M

正紧空间 orthocompact space 4. M

可数仿紧的 countably paracompact 2. 3. 1

可数亚紧的 countably metacompact 2. 3. 25

可遮空间 screenable space 2. 3. 28

可膨胀空间 expandable space 3. 3. 1

六 画

存在性公理 axiom of existence 1. 1. 1

成对公理 axiom of pair 1. 1. 5

并公理 axiom of union 1. 1. 6

传递集 transitive set 1. 2. 1

自然数 natural number 1. 2. 7

闭包保持族 closure-preserving family 2. 2. 20

仿紧空间 paracompact space 2. 2. 1

收缩 shrinking 2. 3. 3

权 weight 3. 1. 15

后继序数 successor ordinal 1. 2. 6

后继基数 successor cardinal 1. 3. 18

共尾函数 cofinal function 1. 3. 22

共尾度 cofinality 1. 3. 23

伪度量 pseudo-metric 2. 1. 7

伪开映射 pseudo-open mapping 2. J

亚紧空间 metacompact space 4. 1. 10

亚可膨胀空间 metaexpandable space 4. 3. 12

有界局部有限的 bounded locally finite 3. 3. 4

有界可膨胀的 boundedly expandable 3. 3. 4

有限到一函数 finite to one function 4. 2. 23

次正规空间　subnormal space　3.2.24

次仿紧空间　subparacompact space　4.1.1

次亚紧空间　submetacompact space　4.2.1

次亚可膨胀空间　submetaexpandable space　4.2.30

次中紧空间　submesocompact space　4.R

七　画

序数　ordinal (number)　1.2.1

均匀覆盖　even cover　2.E

拟仿紧空间　quasi-paracompact space　3.2.21

极限序数　limit ordinal　1.2.6

极限基数　limit cardinel　1.3.18

良序原理　well-ordering principle　1.4.14

良序族　well-monotone family　2.3.2

完满正规的　fully normal　2.1.4

完全正规的　perfectly normal　2.1.26

完全空间　perfect space　2.1.26

完备映射　perfect mapping　2.2.26

局部星形加细(加细序列)　local star-refinement(refining sequence)　2.1.5

局部有限的　locally finite　2.1.9

局部 θ-加细序列　local θ-refining sequence　2.3.19

局部 W-加细(W-加细序列)　local W-refinement(W-refining sequence)　3.3.17(4.2.5)

局部星形 F^*-加细(F^*-加细序列)　local star F^*-refinement(F^*-refining sequence)　4.4.13

局部星形 $\dot{F}$-加细($\dot{F}$-加细序列)　local star $\dot{F}$-refinement($\dot{F}$-refining sequence)　4.4.18

八 画

势 cardinality 1.3.3

单位分解 partition of unity 2.1.22

函数开集 functionally open set 2.1.23

定向族 directed family 2.3.2

饱和部分 saturated part 4.1.18

性质 κ-b_1 property κ-b_1 3.3.22

性质(δ) property(δ) 3.2.5

九 画

选择公理 axiom of choice 1.1.10

垫状加细 cushioned refinement 2.2.12

狭义拟仿紧空间 strictly quasi-paracompact space 3.2.21

标准 Σ-网络 standard Σ-net 3.4.6′

逆向序列 inverse sequence 3.4.20

星形加细 star refinement 2.1.2

星形有限 star-finite 2.4.1

点有限 point finite 2.3.21

点星形加细(加细序列) pointwise star refinement(refining sequence) 2.1.2(4.1.1)

点星形 $\dot{F}$-加细($\dot{F}$-加细序列) pointwise star $\dot{F}$-refinement($\dot{F}$-refining sequence) 4.2.3

点式 W-加细(W-加细序列) pointwise W-refinement(W-refining sequence) 3.3.17(4.2.5)

点星形正紧的 pointwise star-orthocompact 4.N

十

展开　develop　2.1.17

特征　chara　3.4.14

弱 $\bar{\theta}$-可　weakly $\bar{\theta}$-refinable　4.G

紧密度　ghtness　3.4.15

紧映射　compact mapping　4.C

紧有限族　compact-finite family　4.P

离散族　discrete family　2.1.9

离散可膨胀的　discretely expandable　3.3.1

离散次亚可膨胀的　discretely submeta-expandable　4.2.30

离散亚可膨胀的　discretely meta-expandable　4.3.12

离散正可膨胀的　discretely ortho-expandable　4.M

离散 cf-可膨胀的　discretely cf-expandable　4.Q

十一画

基数　cardinal(number)　1.3.4

基础公理　axiom of foundation　1.1.9

基本开集　basic open set　3.4.9

基点　base point　3.4.12

十二画

替换公理模式　axiom schema of replacement　1.1.8

幂集公理　axiom of power set　1.1.7

遗传正规的　hereditarily normal　3.1.7

遗传闭包保持的 hereditarily closure preserving 3.2.16

强展开 strong development 2.1.17

强加细 strong refinement 2.3.3

强仿紧的 strongly paracompact 1.4.1

强 Σ-空间 strong Σ-space 3.4.5

集体正规的 collectionwise normal 2.2.13

集体次正规的 collectionwise subnormal 3.2.24

集体 δ-正规的 collectionwise δ-normal 3.2.27

十三画

概括公理模式 axiom schema of comprehension 1.1.3

十四画

精确加细 precise refinement 2.2.12